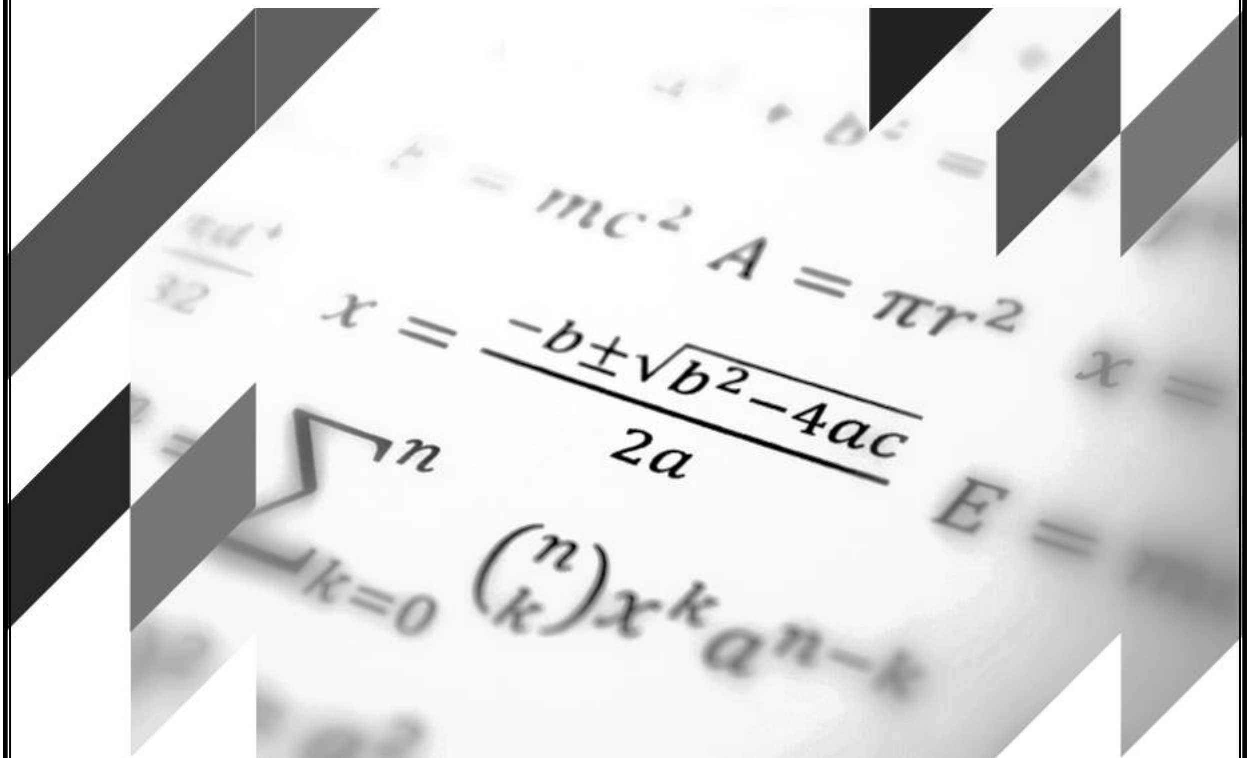
Fundamentos de Matemática



Edición 2019

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Delta

Seminario Universitario de Nivelación

Fundamentos de MATEMATICA

para ingreso a Ingeniería

Lic. Cristina Teresa Varenese
Ing. Fernando Pablo Visintin

Edición 2019

PROLOGO

En el año 2005 la Facultad Regional Delta nos encargó elaborar un material de estudio para el nuevo Seminario de Ingreso, siendo el principal cambio la modalidad anual, con un cuatrimestre de Matemática.

Hoy nos encomiendan reformular y rediseñar ese material original para adaptarlo a los nuevos desafíos del actual Curso de Nivelación, en particular atendiendo a dos aspectos: que el régimen de dictado de Matemática es anual y que el enfoque de enseñanza está basado en la resolución de problemas en grupos.

Nuestra experiencia a lo largo de los últimos 14 años en la enseñanza nos han permitido apreciar, durante las clases y en las instancias de evaluación, los aspectos que más dificultades presentan en el aprendizaje; logro que, por otra parte, medimos año tras año en nuestros cursos de grado en el marco del Grupo de Investigación en Acceso y Permanencia.

Como siempre, el texto que estamos presentando apunta a reforzar lo que el alumno tiene incorporado pero también a ayudarlo a mejorar sus capacidades de análisis, comprensión y aplicación de las herramientas que brinda la Matemática.

El objetivo es potenciar fortalezas y atenuar debilidades para que todos los alumnos que llegan a nuestra puerta puedan enfrentar con éxito los desafíos que van a encontrar en sus estudios de Ingeniería, en particular durante el primer año.

Queremos expresar un especial agradecimiento a la Lic. Fabiana Herreros por su invalorable aporte para la realización de este escrito.

Por último, todo el enfoque de este material parte de un requerimiento esencial: el compromiso con la tarea de todos y de cada uno de los actores del proceso educativo. Sepa aprovechar todo lo que la Universidad Pública Gratuita e Inclusiva le va a ofrecer. Muchos éxitos!

Lic. Cristina T. Varanese
Ing. Fernando P. Visintin

INDICE

Unidad 1: "Conjuntos numéricos"

1.1) <u>NÚMEROS NATURALES</u>

Los números naturales son los que sirven para **contar** y **ordenar**. Todos los conocemos desde pequeños, son: *el uno, el dos, el tres, el cuatro, etc*. Al conjunto de todos ellos se lo indica con la letra **N**, aunque nadie ha visto nunca ese conjunto y cuando queremos escribir sus elementos tenemos que poner puntos suspensivos, etc, o alguna notación equivalente.

A veces se incluye el cero y al conjunto {0 ;1; 2; 3; ...} lo señalamos con el símbolo $\mathbf{N_0}$.

Observación: $\mathbf{N} \subset \mathbf{N_0}$, $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\mathbf{N} = \mathbf{N_0} - \{0\}$

Los números naturales se aprenden en la infancia, junto con los demás conceptos de la vida cotidiana. La palabra "dos" ha adquirido por experiencia un significado bien concreto: es una propiedad de ciertos conjuntos de tener un elemento y otro más pero ninguno más.

Se aprende a reemplazar las palabras por los símbolos de la notación decimal: 1, 2, 5, 10.... Se aprende que el primer número natural es 1, y que no hay un último: después de cualquier natural hay otros, tantos como uno quiera.

Todo esto y mucho más sabemos de los números naturales.

Lo que trabajaremos ahora son aquellas propiedades fundamentales de los números naturales que las trataremos como axiomas. Recordar que un axioma es una proposición que se considera válida sin demostración y a partir de la cual se deducen otras proposiciones.

Hace poco más de 100 años, el matemático Peano descubrió que describiendo claramente la relación de *sucesor o siguiente* se podían obtener todas las propiedades de los números naturales por deducciones lógicas, sin necesidad de aceptarlas como experiencia.

La idea de Peano es fácil de entender en general: para contar necesitamos saber cuál es el siguiente de cada número. Y con eso ya es suficiente: si sabemos contar también sabemos sumar (por algo el primer método de sumar es con los dedos). Y luego la multiplicación se reduce a la suma, etc.

Menos fácil es hacer todo esto en detalle. Pero una vez escritos los axiomas de la relación de sucesor, el resto es seguir el juego y no hacer trampas.

Los axiomas conocidos como *Axiomas de Peano*, en el caso de los números naturales son:

I) $\mathbf{N} \neq \varnothing$

II) Existe una relación que a cada número natural le hace corresponder otro número natural llamado "siguiente".

III) La relación "siguiente" tiene la propiedad que dos números distintos no tienen el mismo siguiente.

IV) El número uno (1) no es siguiente de ningún número.

V) Principio de inducción completa

Si $A \subseteq \mathbf{N}$ verifica que:

i. $1 \in A$
ii. si $n \in A$ entonces $sg(n) \in A$

Entonces $A = \mathbf{N}$

Efectivamente, con estos axiomas se construye el conjunto de los números naturales de la siguiente manera:

1º- Por el axioma I, $\mathbf{N} \neq \emptyset$ y por el axioma IV hay un elemento que se llama uno (1).

*Luego ya tenemos al número 1 en **N***

2º- Por el axioma II, existe otro número natural que es el siguiente de 1 y que no es 1, pues por el axioma IV el 1 no es el siguiente de ningún número. Luego tenemos otro elemento de **N** que llamaremos dos (2)

Ahora tenemos el número 2

3º- Por el axioma II, existe otro número natural que es el siguiente de 2 y que no es 1, pues por el axioma IV el 1 no es el siguiente de ningún número y tampoco es 2 pues por el axioma III, 2 ya era el siguiente de 1 y por lo tanto no puede serlo de otro número. Luego tenemos otro elemento de **N** que llamaremos tres (3).

Ahora tenemos el número 3

4º- Se puede seguir con este razonamiento y crear todos los números naturales.

El axioma V no lo hemos usado para construir los números, pero es necesario para poder demostrar las propiedades que conocemos de ellos.

Luego, a partir de estos axiomas, entonces, se pueden deducir todas las propiedades de las operaciones que ya conocemos de los números naturales. Recordemos cuáles son ellas:

Adición:

S1) Propiedad de cierre:

$$\text{si } a \in \mathbf{N} \text{ y } b \in \mathbf{N}, \text{ entonces } a + b \in \mathbf{N}$$

S2) Propiedad asociativa:

$$\text{si } a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N} \text{ y } c \in \mathbf{N} \text{ entonces } (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

S3) Propiedad conmutativa:

$$\text{si } a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N} \text{ entonces } a + b = b + a$$

Multiplicación:

P1) Propiedad de cierre:

$$\text{si } a \in \mathbf{N} \text{ y } b \in \mathbf{N}, \text{ entonces } a \,.\, b \in \mathbf{N}$$

P2) Propiedad asociativa:

$$\text{si } a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N} \text{ y } c \in \mathbf{N} \text{ entonces } (a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c) = a \,.\, b \,.\, c$$

P3) Propiedad conmutativa:

$$\text{si } a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N} \text{ entonces } a \,.\, b = b \,.\, a$$

P4) Propiedad de existencia de elemento neutro:

$$1 \in \mathbf{N} \text{ cumple que } a \,.\, 1 = a, \text{ para todo } a \in \mathbf{N}$$

Diferencia o resta

La **resta o diferencia** entre dos números naturales a y b es un tercer número natural c de forma que:

$$a - b = c \text{ si y solo si } c + b = a$$

Observaciones:

- La resta es una operación incompleta en **N**, ya que no siempre es posible realizarla, es decir no cumple la propiedad de cierre. Por ejemplo no se puede encontrar un número natural tal que 3 – 4 = n, ya que en este caso n = -1 y no es un número natural
- Tampoco cumple las propiedades:

a) asociativa: pues

$$(6 - 3) - 2 = 3 - 2 = 1$$

y

$$6 - (3 - 2) = 6 - 1 = 5$$

b) conmutativa: pues

$$5 - 3 = 2$$

pero

3 – 5 no se puede realizar en **N**

División

La **división exacta** de a por b es un número c que verifica que:

$$a : b = c \text{ si y solo si } c \,.\, b = a$$

Observaciones:

- La división exacta de a por b no siempre es posible en **N**. Por ejemplo no existe un número natural tal que 3:2 = n, ya que en este caso n = 1,5 que no es un número natural.
- Cuando existe c tal que a:b = c, se dice que a **es múltiplo** de b, o que b es factor de a, o que b divide a a, o que a es divisible por b.
- El conjunto de todos los múltiplos de un número dado b lo podemos indicar con el símbolo: $\dot{b}$
- Cuando un número natural (distinto de 1) tiene como únicos factores a la unidad y a sí mismo se dice que es **primo**.

Ejemplos:

1- 6 es múltiplo de 2 y de tres ya que 6 = 2.3, o sea que 6:2 = 3 y 6:3 = 2.

2- El conjunto $\dot{5}$ está formado por todos los múltiplos de 5, es decir por los números naturales que terminan en 5 o en 0.

3- Los números 2, 3, 5, 7, 11, etc, son primos.

Potenciación

Al producto de 2 o más números iguales se lo llama **potenciación** y se escribe:

$$\underbrace{a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{n \text{ factores}} = a^n$$

Propiedades de la potenciación:

1- *Producto de potencias de igual base*: si a ∈ **N**, n ∈ **N**, m ∈ **N** entonces

$$a^n \,.\, b^m = a^{n+m}$$

Dem:

$$a^n \,.\, b^m = \underbrace{a \,.\, a \,.\, \ldots \,.a}_{n \text{ factores}} \,.\, \underbrace{a \,.\, a \,.\, \ldots \,.a}_{m \text{ factores}} = a^{n+m}$$

Ejemplo:

$3^2.3^3 = 3^5$, esto es que da el mismo resultado hacer 3^2, 3^3 y luego multiplicarlos; que realizar directamente 3^5

2- *Cociente de potencias de igual base:* si a $\in$ **N**, n $\in$ **N**, m $\in$ **N** , n > m entonces

$$\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

Dem:

$$a^n : a^m = \underbrace{(a.a...a)}_{\text{m factores}}\underbrace{(a.a...a)}_{\text{n – m factores}} : \underbrace{(a.a...a)}_{\text{m factores}} = a^{n-m}$$

3- *Potencia de otra potencia*: si a $\in$ **N**, n $\in$ **N**, m $\in$ **N**, entonces

$$\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$$

Dem:

$$\left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n.a^n...a^n}_{\text{m factores}} = a^{n.m}$$

Observación:

La potenciación no es asociativa, es decir, $\left(a^b\right)^c \neq a^{\left(b^c\right)}$. La prioridad para la resolución es siempre calcular primero el exponente, con lo cual se utilizan paréntesis sólo si queremos alterar esta prioridad. Así:

$$2^{3^2} = 2^9 = 512$$

pues **al no haber paréntesis se resuelve primero el exponente**. En cambio

$$\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$$

los paréntesis indican que hay que resolver primero la potencia que figura entre ellos. Es en este caso que también se puede aplicar la propiedad de potencia de otra potencia:

$$\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64$$

4- *Distributiva de la potenciación respecto al producto*: si a $\in$ **N**, b $\in$ **N**, n $\in$ **N** entonces:

$$\boldsymbol{(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n}$$

Dem:

$$(a\,.\,b)^n = \underbrace{(a\,.\,b)(a\,.\,b)\,.\,\dots\,.\,(a\,.\,b)}_{\text{n factores}} \underset{\text{conmutativa y asociativa del producto}}{=} \underbrace{a\,.\,a\,.\,\dots\,.\,a}_{\text{n factores}}\,.\,\underbrace{b\,.\,b\,.\,\dots\,.\,b}_{\text{v n factores}} = a^n\,.\,b^n$$

5- *Distributiva de la potenciación respecto al cociente:* si a $\in$ **N**, b $\in$ **N**, n $\in$ **N** entonces

$$\boldsymbol{(a : b)^n = a^n : b^n}$$

Observación:

Si estudiamos la forma de las propiedades de la potenciación, notaremos que:

- hay propiedades sólo con respecto a la multiplicación y la división
- o bien tienen la misma base (caso de las dos primeras) o bien tienen el mismo exponente (caso de las dos últimas)

Estos dos hechos son muy útiles para decidir si existe o no una propiedad que me permita facilitar el cálculo. Ejemplos sobre esto se verán más adelante cuando se extienda la potenciación a otros campos numéricos.

Definición: todo número elevado a la cero es uno: $\mathbf{a^0 = 1}$.

Descomposición de un número en potencias de 10
Nuestro sistema de numeración es *decimal posicional*.
Decimal por dos razones:

a. Porque utiliza diez símbolos: 0, 1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 (dígitos)
b. Porque cada vez que se tiene una unidad más que nueve unidades de un orden, se obtiene otra de un orden superior

Posicional porque el valor de cada símbolo depende de la posición de él dentro del número.

Todos los números se pueden escribir como una suma de productos en los cuáles uno de los factores es una potencia de 10 y el otro un dígito.

Ejemplo:
El número 1303 resume la cuenta: $1.10^3 + 3.10^2 + 0.10^1 + 3.10^0$
Notemos que el dígito 3 tiene distinto valor según su posición en el número en un caso significa 300 unidades y en el otro 3 unidades.

1.2) <u>NÚMEROS ENTEROS</u>

Los números negativos aparecen en muchas cuestiones prácticas. La temperatura puede bajar de cero grado. Si hay 5 grados bajo cero, este 5 no es el número natural 5. Lo mismo pasa con las cantidades de dinero si admitimos deudas: si tengo \$1000 y gasto \$1500, lo que me queda, o sea \$1000 - \$1500 es una deuda de \$500. El número 500 por sí solo no define ahora la situación: hay que agregar si es una deuda o un haber; si es negativo o positivo. Lo mismo sucede con la temperatura, hay que indicar si es sobre o bajo cero, si es positiva o negativa.

Estos números que están en “sentido opuesto” aparecen frecuentemente.

Si un auto recorre 100 km en un camino, es muy distinto si va o si viene. En este caso es dudoso a cuál llamaremos positivo o negativo. Pero eso no importa, lo importante es que se trata de dos sentidos opuestos.

Una ventaja al admitir esta cantidades negativas, opuestas a las positivas, es que entonces se puede restar dos cantidades positivas, aunque la segunda sea mayor que la primera, diciendo que el resultado es negativo. Se resta siempre el menor del mayor pero el resultado es negativo.

Pero entonces hay que decir también cómo se suman y restan dos cantidades negativas, cómo se multiplican o dividen, etc. Esto ya no es tan evidente y es imposible seguir adelante sin realizar la formalización correspondiente.

Para ello establezcamos los axiomas que se cumplen en el conjunto que admite como elementos a los números naturales, el cero y los opuestos de los números naturales, llamado **conjunto de números enteros** (**Z**).

Adición y multiplicación
En el conjunto de los números enteros existen dos operaciones que llamaremos adición (+) y multiplicación (.) que verifican:

Axioma 1 (propiedad de cierre y uniforme)
Para todo a $\in$ **Z** y b $\in$ **Z** se cumple que:

$a + b \in \mathbf{Z}$
$a \cdot b \in \mathbf{Z}$

y el resultado es **único**.

Axioma 2 (propiedad asociativa)

Para todo $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$ y $c \in \mathbf{Z}$ se cumple que:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$
$$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c) = a \,.\, b \,.\, c$$

Axioma 3 (propiedad conmutativa)

Para todo $a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \mathbf{Z}$ se cumple que:

$$a + b = b + a$$
$$a \,.\, b = b \,.\, a$$

Axioma 4 (existencia de elemento neutro)

Para todo $a \in \mathbf{Z}$ se cumple que:

$$a + 0 = a$$
$$a \,.\, 1 = a$$

Axioma 5 (existencia de elemento opuesto)

Para todo $a \in \mathbf{Z}$ se cumple que:

$$a + (-a) = 0$$

Axioma 6 (propiedad distributiva)

Para todo $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$ y $c \in \mathbf{Z}$ se cumple que:

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$$

Axioma 7 (simplificación en el producto)

Para todo $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$ y $c \in \mathbf{Z}$, $c \neq 0$ se cumple que:

Si $a \,.\, c = b \,.\, c$ entonces $a = b$

Del primer axioma obtenemos el hecho que al sumar o multiplicar miembro a miembro de una igualdad de números enteros, por un mismo número entero, sigue valiendo la igualdad, pues el resultado es único. Este hecho es útil cuando queremos resolver, por ejemplo:

$$x + 5 = 2$$

sumando miembro a miembro –5, se obtiene

$$(x + 5) + (-5) = 2 + (-5)$$

por la asociatividad de la suma

$$x + (5 + (-5)) = 2 + (-5)$$

por el axioma del opuesto resulta $5 + (-5) = 0$, luego

$$x + 0 = 2 + (-5)$$

y por el axioma del elemento neutro, $x + 0 = x$

$$x = 2 + (-5)$$

Observando la primera y la última igualdad, hemos hecho lo que se conoce como “pasaje de términos”. Es decir que el pasaje de términos es el uso sintetizado de estos tres axiomas.

Del axioma 2 tenemos la regla conocida de **supresión de paréntesis** si antes hay una suma.

Del axioma 6 tenemos la posibilidad de **extraer factor común**, si se intercambian los miembros de la igualdad planteada. Por ejemplo:

$$10b + 15ab = 5b.(2 + 3a)$$

En el axioma 5 se introduce la notación “-a” que se lee “opuesto de a” y cuya propiedad es la indicada, es decir que al sumar un número y su opuesto se obtiene 0. Cabe aclarar que el símbolo “-“ no indica positivo o negativo, sólo “opuesto”.

Así, el opuesto de 2 es el número –2, pero el opuesto de –3 es el número 3 = -(-3)

Diferencia
La **diferencia o resta** de dos números enteros se define como

$$\mathbf{a - b = a + (-b)}$$

La definición de diferencia en **Z** es notablemente distinta a la correspondiente en **N**. Mientras que en los naturales hay que "buscar" un número que verifique una propiedad (que en algunos casos no existe), en los enteros la diferencia entre dos números se define a partir de **la suma del opuesto del segundo** y esto es siempre posible de realizar.

Con este cuerpo de axiomas y la definición de diferencia se pueden demostrar todos las reglas que conocemos sobre cómo operar con los números enteros. A modo de ejemplo realizaremos las demostraciones de hechos que nos son muy familiares.

Teorema 2.1: Para todo $a \in \mathbf{Z}$, $a.0 = 0$
Dem:

$$a.0 \underset{\text{Ax. 4}}{\overset{\downarrow}{=}} a.0 + 0 \underset{\text{Ax. 5}}{\overset{\downarrow}{=}} a.0 + a.a + (-a.a) \underset{\text{Ax. 6}}{\overset{\downarrow}{=}} a.(0 + a) + (-a.a) \underset{\text{Ax. 4}}{\overset{\downarrow}{=}} a.a + (-a.a) \underset{\text{Ax. 5}}{\overset{\downarrow}{=}} 0$$

Teorema 2.2: Si $a . b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$
Dem:
Si $a \neq 0$, entonces por el teorema anterior, $a . b = 0$ se puede escribir como
$a . b = a . 0$
y por el axioma 7 resulta $b = 0$
De la misma forma si $b \neq 0$

Observación:
El teorema anterior nos da la importante herramienta que se utiliza para simplificar la expresión de muchas ecuaciones: si el producto de dos números es cero debe ser alguno de ellos cero. Por ejemplo, si queremos resolver la ecuación

$$\mathbf{x^3 - 4x^2 + 4x = 0}$$

no se puede resolver utilizando las reglas de despeje, pero si podemos sacar factor común x:

$$\mathbf{x.(x^2 - 4x + 4) = 0}$$

y el segundo factor es un trinomio cuadrado perfecto y resulta:

$$\mathbf{x.(x - 2)^2 = 0}$$

ahora, aplicando este último teorema tenemos que:

$$\mathbf{x = 0 \text{ o } (x - 2)^2 = 0}$$

es decir

$$\mathbf{x = 0 \text{ o } x = 2}$$

que son las soluciones buscadas.

Multiplicación de números enteros
Teorema 2.3: $(-a)(-b) = a.b$
Teorema 2.4: $a.(-b) = -(a.b)$

Estos teoremas permiten realizar multiplicaciones con números negativos, así por ejemplo:

$$(-3).(-5) = 3.5$$
$$(-1).(-1) = 1.\ 1 = 1$$

$$(-(-4)).(-(-3)) = (-4).(-3) = 4.3$$
$$3.(-2) = -(3.2) \qquad 4.(-(-5)) = -(4.(-5)) = -(-(4.5)) = (-1).(-1)(4.5) = 1.1.4.5 = 4.5$$

Estos teoremas se pueden resumir de la siguiente manera: “al multiplicar dos números enteros, el resultado es positivo si los números tienen igual signo y es negativo si tienen distinto signo”.

Propiedad distributiva de la multiplicación respeto de la suma (o la resta)

Teorema 2.5: $a.(b + c) = a.b + a.c$

Teorema 2.6: $a.(b - c) = a.b - a.c$

Toda resta se puede expresar siempre como una suma y toda suma como resta

Ya vimos que la **diferencia o resta** de dos números enteros se define como

$$a - b = a + (-b)$$

Entonces es muy fácil demostrar que:

Teorema 2.7: $a - (-b) = a + b$

Supresión de paréntesis

Teorema 2.8: $-(a + b) = -a - b$

Teorema 2.9: $-(a - b) = -a + b = b - a$

Si delante de un paréntesis hay un signo menos para suprimir los paréntesis se deben cambiar los signos de todos los términos del interior del paréntesis. Por ejemplo:

$$5 - (3 + (-2)) = 5 - 3 + 2 = 5 + (-3) + 2$$

Cuadrado de binomio

Teorema 2.12: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Dem:

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = (a + b).a + (a + b).b = a^2 + b.a + a.b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta regla se expresa de la siguiente manera “el cuadrado de un binomio es el cuadrado del primer término más el doble producto de los dos términos más el cuadrado del segundo término”. Así, por ejemplo:

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2.2x.3 + 3^2 = 2^2x^2 + 12x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

Diferencia de cuadrados

Teorema 2.13: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Dem:

$$(a + b).(a - b) = (a + b).a - (a + b).b = a^2 + b.a - a.b - b^2 = a^2 - b^2$$

Esta regla se expresa de la siguiente manera “el producto de una suma por una resta es igual a la resta de sus cuadrados”. Así, por ejemplo:

$$(3 - x)(3 + x) = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$$

Orden en Z

Como sabemos, los números enteros pueden ordenarse de mayor a menor o viceversa. Este hecho y las propiedades de las desigualdades que ya conocemos y utilizamos se demuestran a partir del establecimiento del siguiente **axioma de orden** de los números enteros:

Para cualquier entero a, se cumple una y solo una de las siguientes alternativas:

a es positivo **a = 0** **-a es positivo**

Mucho cuidado al utilizar letras! El número –a será negativo sólo si a es positivo; si a es negativo resultará que –a es positivo.

Notaciones:

Para indicar que a es **positivo** se escribe **a > 0**
Para indicar que a es **negativo** se escribe **a < 0**
Para indicar que a es **no positivo** se escribe **a ≤ 0**
Para indicar que a es **no negativo** se escribe **a ≥ 0**

La escritura $a > b$ significa, por definición, que $a – b > 0$
La escritura $a < b$ significa, por definición, que $b > a$ (es decir, que $b – a > 0$)

Ejemplos:
$3 > 2$ pues $3 – 2 = 1 > 0$
$n + 1 > n$ pues $n + 1 – n = 1 > 0$

Nos detendremos a demostrar cómo funcionan las desigualdades si sumamos o multiplicamos ambos miembros por un número, ya que esto nos servirá más adelante para la resolución de inecuaciones:

Teorema 2.14: Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ (esto es, si se suma a ambos miembros de una desigualdad un mismo número se obtiene una desigualdad del mismo sentido)

Dem: queremos demostrar que $a + c – (b + c) > 0$. Ahora bien:
$a + c – (b + c) = a + c – b – c = a – b$ que es positivo por hipótesis, luego queda demostrado.

Ejemplo:

Si
$$x + 5 > 3$$
entonces, por este teorema se tiene que
$$(x + 5) + (-5) > 3 + (-5)$$
usando la propiedad asociativa:
$$x + (5 + (-5)) > 3 + (-5)$$
por la propiedad que cumplen un número y su opuesto, $5 + (-5) = 0$
$$x + 0 > 3 + (-5)$$
y por la propiedad que tiene por axioma el número 0, $x + 0 = x$
$$x > 3 + (-5)$$
$$x > -2$$
y nuevamente, encontramos que se ha justificado el “pasaje de términos”.

Teorema 2.15: si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a.c > b.c$ (es decir que al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número positivo, la desigualdad que se obtiene es del mismo sentido.)

Dem: queremos probar que $a.c – b.c > 0$. Ahora bien:
$$a.c – b.c = (a – b).c$$
como $a > b$ se tiene $a – b > 0$ y como $c > 0$, resulta que $(a – b).c > 0$

Teorema 2.16: si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a.c < b.c$ (es decir que al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad que se obtiene es de sentido contrario.)

Dem: queremos probar que $a.c – b.c < 0$. Ahora bien:
$$a.c – b.c = (a – b).c$$
como $a > b$ se tiene $a – b > 0$ y como $c < 0$, resulta que $(a – b).c < 0$

Ejemplo:
Sabemos que 5 > 3, si multiplicamos a 5 por –4: 5.(-4) = -20, y se hacemos lo mismo con 3: 3.(-4) = -12 y resulta que:

$$-12 > -20$$

Es decir que la desigualdad **quedó invertida**.

Potenciación
A las operaciones básicas que hemos estudiado de los números enteros, se puede extender la potenciación con exponente natural con las mismas propiedades que ya hemos estudiado en **N**.

División
Nos vamos a detener en la división, específicamente en la llamada **división entera**, que surge a partir del siguiente teorema:

Teorema 2.17: Dados a y b números enteros, con $b \neq 0$, existen únicos enteros q y r tales que:

$$\mathbf{a = b.q + r}, \text{ con } 0 \leq r < |b|$$ [1]

Si a y b son positivos, se encuentran q y r a través del algoritmo de la división que hemos aprendido. Si alguno de ellos es negativo, también se pueden encontrar q y r.
Ejemplos:
Si a = 13 y b = 5 se tiene q = 2 y r = 3 pues 13 = 5.2 + 3
Si a = 13 y b = -5 se tiene q = -2 y r = 3 pues 13 = -5.(-2) + 3
Si a = -13 y b = 5 se tiene q = -3 y r = 2 pues –13 = 5.(-3) + 2
Si a = -13 y b = -5 se tiene q = 3 y r = 2 pues –13 = -5.3 + 2

En general, si el resto de realizar la división entera de a por b es cero se dice que a es **múltiplo** de b, o que b es **divisor** de a, o que b es **factor** de a, o que b **divide a** a y resulta que:

a = b.q, para algún entero q

En este caso se dice que la división de a por b **es exacta**.

Observación IMPORTANTE: con esta definición queda claro que **la división por cero no se puede hacer**, pues si así fuera resulta que a : 0 = b solo si b.0 = a, y esto sólo es posible si a = 0. Ahora bien si a = 0, resulta que 0: 0 = c solo si 0.c = 0, igualdad que vale para cualquier número c, con lo que el resultado no es único. Debido a estas dos razones es que **no se puede dividir por cero.**

El número 0 no es divisor de ningún número pero sí es múltiplo de cualquiera.

Si un número es divisible por 2 se dice que es **par**, de lo contrario se dice que es **impar**.

El **divisor común mayor** (DCM) de varios números enteros es el mayor número positivo que es divisor simultáneamente de cada uno de ellos.

El **múltiplo común menor** (MCM) de varios números enteros es el menor número positivo que en múltiplo simultáneamente de cada uno de ellos.

Ejemplos:
1- dcm (24, 60) = 12
2- mcm (6, 10) = 30

[1] $|b|$ se lee módulo de b y es b si $b \geq 0$ y –b si $b < 0$. Más adelante estudiaremos sus propiedades.

Un entero positivo p ≠ 1 es **primo si sus únicos divisores positivos son 1 y p**.
Si un número entero no es primo se llama **compuesto**.
Dos números enteros, a y b, se dicen **coprimos o primos entre sí**, si dcm(a, b) = 1.

Teorema fundamental de la aritmética:
Todo entero distinto de cero y de ±1 puede expresarse como producto de ±1 (uno de los dos) por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden en que se consideren los factores.

1.3) <u>NÚMEROS RACIONALES</u>

Los números enteros no son suficientes para los cálculos más comunes, pues no siempre la división es exacta. Por ejemplo, 3:2 no está definido en **Z** pues no existe ningún número entero p talque 2.p = 3. Sin embargo, en la práctica sabemos que 3:2 tiene un resultado que es 1 y medio.

Esto se representa generalmente así: 3:2 = 1,5. Pero hay que tener cuidado con estos "números decimales" que parecen resolver el problema, pues bien sabemos que no es así. Si queremos calcular 2:3, no hay decimal que exprese exactamente el resultado, excepto que aceptemos infinitas cifras decimales después de la coma. Pero eso no nos conviene, pues los números con infinitas cifras decimales pueden no ser el resultado de una división de números enteros, como en el caso de π o $\sqrt{2}$.

El otro procedimiento que hemos aprendido en la escuela es el de las fracciones:

El resultado de dividir 3 por 2 es la fracción $\frac{3}{2}$

El resultado de dividir 2 por 3 es la fracción $\frac{2}{3}$

Por lo tanto, buscamos ampliar el conjunto de los números enteros para poder dividir, y la forma de hacerlo es definiendo este tipo de números llamados **fracciones**.

Definición: una **fracción** es un par ordenado de números enteros (p; q), donde q ≠ 0. El primer elemento del par se llamará **numerador** de la fracción y el segundo **denominador**.

En general, en vez de escribir el par ordenado (p;q) lo escribiremos;

$$\frac{p \longrightarrow \boxed{\text{numerador}}}{\boxed{\text{denominador}} \longleftarrow q}$$

Sabemos que, por ejemplo, el entero 4 lo podemos asociar a la fracción $\frac{4}{1}$, y así con todos los enteros. Con lo que el conjunto de fracciones con denominador 1 es, salvo la forma de escribirlo, el conjunto **Z**.

Pero también podemos elegir la fracción $\frac{8}{2}$, o $\frac{-8}{-2}$, o muchas otras para representar al entero 4. Para ello daremos la definición de número racional, con la que quedará claro cuál fracción representa qué número.

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si se cumple que a.d = b.c. En este caso se escribe:

$$\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}$$

Luego se define: un **número racional** es un conjunto de fracciones equivalentes y se representa simbólicamente como:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{\frac{c}{d} \,/\, a.d = b.c\right\}$$

Se elige como **representante** del conjunto a la fracción perteneciente a él que verifique que el numerador y el denominador son coprimos y denominador positivo.

Al conjunto de todos los números racionales se lo indica con la letra Q**.**

Ahora debemos definir cómo se suman y multiplican estos nuevos números.

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, números racionales se define

Adición y multiplicación

Adición: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + bc}{bd}$

Multiplicación: $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Observaciones:

1. La adición y la multiplicación definidas así cumplen las mismas propiedades que la adición y multiplicación de números enteros. Luego el resto de los teoremas que se han demostrado en **Z** son válidos también en **Q**.
2. Asociando los números enteros con los racionales de denominador 1, queda incluido **Z** en **Q**, conservando las operaciones definidas para **Z**. Por ejemplo, si consideramos los números enteros 4 y –6 y los queremos sumar y multiplicar como números racionales, debemos proceder de la siguiente manera:

$$4 + (-6) = \frac{4}{1} + \frac{-6}{1} = \frac{4.1 + (-6).1}{1.1} = \frac{4 + (-6)}{1}$$

son el mismo número

$$4.(-6) = \frac{4}{1} . \frac{-6}{1} = \frac{4.(-6)}{1.1} = \frac{4.(-6)}{1}$$

son el mismo número

3. Si queremos sumar números racionales del mismo denominador, por ejemplo:

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p}+...+\frac{a_n}{p}$$

se puede escribir cada número:

$$\frac{1}{p}.a_i$$

de esta forma la suma queda:

$$\frac{1}{p}.a_1+\frac{1}{p}.a_2+...+\frac{1}{p}.a_n$$

sacando factor común $\frac{1}{p}$, se tiene

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p}+...+\frac{a_n}{p} = \frac{1}{p}.(a_1+a_2+...+.a_n)=\frac{a_1+a_2+...+.a_n}{p}$$

o sea, que el resultado es el número racional que tiene como denominador el mismo y el numerador es la suma de los numeradores.

Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2-4+5}{3}=\frac{3}{3}=1$$

4. Para sumar números racionales con distintos denominadores, se busca el múltiplo común menor de ellos, y luego se escribe la fracción equivalente a cada una de las dadas que tenga como denominador el mcm. Una vez hecho esto, se procede como en la observación anterior. Por ejemplo:

$$\frac{-2}{5}+\frac{3}{2}-\frac{5}{4}$$

El mcm(5, 2, 4) = 20, luego

$$\frac{-2}{5}=\frac{-8}{20} \qquad \frac{3}{2}=\frac{30}{20} \qquad \frac{5}{4}=\frac{25}{20}$$

Por lo tanto

$$\frac{-2}{5}+\frac{3}{2}-\frac{5}{4} = \frac{-8}{20}+\frac{30}{20}-\frac{25}{20}=\frac{-8+30-25}{20}=\frac{-3}{20}$$

Orden en Q

Definiciones: (suponiendo todos los denominadores involucrados positivos)

a) Se dice que $\frac{a}{b}$ > 0 si y solo si a > 0. Es decir que un racional con denominador positivo es positivo solo si su numerador también lo es.

b) Análogamente, $\frac{a}{b}$ < 0 si y solo si a < 0. Es decir que un racional con denominador positivo es negativo solo si su numerador también lo es.

c) $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ números racionales, se escribe $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si y solo si $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0$

Observación:

Si suponemos b y d positivos, tenemos que

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \Leftrightarrow \frac{a.d-b.c}{b.d} > 0$$

En esta última desigualdad, como b.d > 0, para que la fracción sea positiva debe ser

$$a.d - b.c > 0$$

o sea

$$a.d > b.c$$

Luego se tiene que

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d > b.c$$

Ejemplo:

$\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ pues 4 < 6

Si $\frac{a}{b}$ < 1 entonces a < b, esto dice que un número racional con numerador menor que el denominador es menor que 1 y se denomina "fracción propia".
Análogamente, si el numerador es mayor que el denominador, entonces el número racional es mayor que 1 y se denomina "fracción impropia".

El inverso

Una propiedad que caracteriza a los números racionales es la existencia de inverso. Es decir, dado un número racional distinto de cero, existe otro racional que multiplicado por él da uno.

$$\text{Para todo } \frac{a}{b} \in \mathbf{Q},\ \frac{a}{b} \neq 0 \text{ existe } \frac{c}{d} \in \mathbf{Q} \text{ tal que } \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = 1$$

El número $\frac{c}{d}$ se lo llama **inverso** de $\frac{a}{b}$ y se lo escribe como $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$.

Es fácil verificar que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, pues $\frac{a}{b}.\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a}{b}.\frac{b}{a} = \frac{a.b}{b.a} = \frac{a.b}{a.b} = 1$

La existencia del inverso de un número racional nos permite:

1- Intercambiar el axioma 7 de números enteros por el de existencia de inverso, ya que ambas afirmaciones son equivalentes.
2- Definir la operación inversa de la multiplicación, **la división**, como:
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$$
3- Definir la **potencia de exponente negativo** como, dados $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, n $\in$ **N**,
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Representación decimal

Lee el siguiente enunciado de un problema:
"Gasté primero \$8 y \$1/4, luego \$3 y \$1/2. ¿Cuánto gasté en total?"

No es de esta forma como nos expresamos diariamente para referirnos al dinero que gastamos. ¿Cuál sería el enunciado que comúnmente utilizamos?

Esto se debe a que es posible demostrar que a cada número racional lo podemos expresar también como un número decimal.

Un número decimal está compuesto de dos partes: una parte entera y otra decimal; de forma que una expresión del tipo:

$$\mathbf{a_0,a_1a_2a_3a_4....}$$

con $a_0 \in Z$ y $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, es la que llamaremos **número decimal**.

Ahora bien, ¿cómo obtenemos el número decimal equivalente a un número racional dado?

La respuesta ya la conocemos, hay que realizar la "división decimal" del numerador por el denominador.

Ejemplo:

El número decimal equivalente a $\frac{12}{5}$ es 2,4 pues:

$$\begin{array}{l|l} 12 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 2,4 \\ \;\;0 & \end{array}$$

Según lo que hemos visto de división entera, tenemos que:

$$12 = 2.5 + 2 \ (*)$$

Si tomamos el resto, 2, no se puede dividir por 5, luego multiplicamos y dividimos por 10[2] y obtenemos:

$$2 = 2.10.\frac{1}{10} = 20.\frac{1}{10}$$

Realizamos la división de 20 por cinco

$$20.\frac{1}{10} = 4.5.\frac{1}{10}$$

Reemplazamos en (*) y sacamos factor común 5:

$$12 = 2.5 + 4.5.\frac{1}{10} = 5.\left(2 + 4.\frac{1}{10}\right)$$

Dividimos miembro a miembro por 5:

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{4}{10}$$

Este procedimiento, algoritmizado, es el que hemos realizado al principio y que se conoce como *división decimal.*

Números racionales cuyo denominador es una potencia natural de 10, tienen una expresión decimal sencilla de hallar sin necesidad de realizar la división:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1} = 0{,}1 \qquad \frac{1}{100} = 10^{-2} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{1000} = 10^{-3} = 0{,}001 \qquad ...$$

En general

2 esto se corresponde con la parte del algoritmo de la división en que "bajamos un cero"

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-n} = 0{,}0 \ldots 01$$

con n-1 ceros después de la coma decimal.

Este hecho permite hallar con facilidad la expresión decimal de aquellos número racionales que pueden representarse por una fracción cuyo denominador sea una potencia natural de 10 (fracciones decimales). Por ejemplo:

$$\frac{12}{5} = \frac{24}{10}$$

$$24 = 2.10+4 = 2.10 + 4\frac{1}{10}.10 = 10.\left(2 + 4.\frac{1}{10}\right) = 10.(2 + 0{,}4) = 10.2{,}4$$

Luego

$$\frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2{,}4$$

Al buscar el número decimal correspondiente al número racional $\frac{13}{90}$ resulta:

$$\begin{array}{l|l} 130 & 90 \\ \hline 400 & 0{,}14 \\ \;\;40 & \\ \;\;\;\ldots & \end{array}$$

A partir de aquí los restos se empiezan a repetir, con lo que las cifras decimales también. En este caso se dice que el número decimal tiene una expresión periódica y se escribe:

$$\frac{13}{90} = 0{,}1\widehat{4}$$

El arco sobre el número 4 indica que esa cifra se repite indefinidamente.

Otro tipo de fracciones con expresiones decimales especiales son:

$$\frac{1}{9} = 0{,}\widehat{1} \qquad \frac{2}{9} = 0{,}\widehat{2} \qquad \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0{,}\widehat{3} \qquad \frac{4}{9} = 0{,}\widehat{4}$$

$$\frac{5}{9} = 0{,}\widehat{5} \qquad \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6} \qquad \frac{7}{9} = 0{,}\widehat{7} \qquad \frac{8}{9} = 0{,}\widehat{8}$$

$$\frac{10}{99} = 0{,}\overline{10} \qquad \frac{11}{99} = \frac{1}{9} = 0{,}\widehat{1} \qquad \frac{12}{99} = 0{,}\overline{12} \qquad \frac{13}{99} = 0{,}\overline{13}$$

y así sucesivamente. Es decir una fracción cuyo denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el denominador, le corresponde una expresión decimal con parte entera 0 y parte decimal periódica igual al número del numerador.

Hemos realizado entonces una correspondencia que a cada número racional le asigna un número decimal. ¿Será posible que a cada número decimal le corresponda un número racional?

Para responder esta pregunta tenemos que encontrar un procedimiento que permita transformar en fracción un número decimal.

Analizando los ejemplos anteriores, encontramos dos tipos de expresiones de un número decimal: una expresión exacta o finita (correspondiente a fracciones decimales) o una expresión infinita periódica. Veamos como volver a la fracción dado un número decimal con alguna de estas dos expresiones:

Expresión exacta o finita
Veamos primero algunos ejemplos.

1- $0{,}1 = \frac{1}{10}$ $\quad 0{,}2 = 2.\frac{1}{10} = \frac{2}{10}$ $\quad 0{,}23 = 23.0{,}01 = \frac{23}{100}$, etc.

2- $2{,}4 = 2 + 0{,}4 = 2 + \frac{4}{10} = \frac{20+4}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

3- $23{,}56 = 23+\frac{56}{100} = \frac{2300+56}{100} = \frac{2356}{100}$

Luego, si la expresión decimal es exacta, es sencillo enunciar una regla para obtener la fracción decimal correspondiente.

Expresión infinita periódica:
Comencemos distinguiendo primero entre aquellas que en su expresión decimal sólo hay cifras periódicas (número decimales periódicos puros) o también hay cifras no periódicas (números decimales periódicos mixtos); y luego si tienen parte entera igual a 0 o no.

Números decimales periódicos puros
Si la parte entera es cero, podemos utilizar lo visto en el ejemplo 4 de la página anterior y obtenemos una forma fácil de encontrar la fracción buscada. Por ejemplo:

$$0{,}\overline{17} = \frac{17}{99} \qquad 0{,}\overline{123} = \frac{123}{999}$$

En general, si el número decimal es $0{,}\overline{a_1a_2...a_n}$, la fracción correspondiente es

$$0{,}\overline{a_1a_2...a_n} = \frac{a_1a_2...a_n}{99...9}$$

donde en el denominador hay tantos nueves como cifras decimales periódicas tiene el número.
Si la parte entera no es cero, hay una forma sencilla de encontrar la fracción utilizando lo anterior; ya que, por ejemplo:

$$12{,}\overline{65} = 12 + 0{,}\overline{65} = 12 + \frac{65}{99} = \frac{1188+65}{99} = \frac{1253}{99}$$

Es decir, escribimos el número como suma de su parte entera y su parte decimal, encontramos la fracción correspondiente a su parte decimal y luego realizamos la suma de fracciones.

Números decimales periódicos mixtos
En estos casos comenzamos descomponiendo el número como suma de su parte entera, su parte decimal no periódica y su parte decimal periódica. Así por ejemplo, el número $4{,}2\overset{\frown}{1}$ se puede expresar como:

$$4{,}2\overset{\frown}{1} = 4 + 0{,}2 + 0{,}0\overset{\frown}{1}$$

Luego, tenemos que encontrar una fracción cuya expresión decimal sea $0{,}0\overset{\frown}{1}$. Llamemos x a dicha fracción, queremos entonces que:

$$x = 0{,}0\overset{\frown}{1}$$

Multiplicando miembro a miembro por 10 (¿por qué?)

$$10x = 0,\overset{\frown}{1}$$

o sea que

$$10x = \frac{1}{9}$$

Por lo tanto

$$x = \frac{1}{90}$$

Luego

$$4,2\overset{\frown}{1} = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{90} = \frac{360+18+1}{90} = \frac{379}{90}$$

Se puede enunciar una regla general que permite obtener la fracción correspondiente a un número decimal exacto o periódico.
De acuerdo a lo hecho hasta aquí podemos decir que a un número racional se lo puede representar de dos formas:

1) como FRACCIÓN o forma simbólica
2) como NÚMERO DECIMAL

Debemos tener en cuenta que siempre que trabajemos con la representación simbólica estaremos obteniendo el resultado exacto de nuestros cálculos, sobre todo si utilizamos la calculadora para operar.

Para responder a la pregunta que hemos hecho al comenzar esta última explicación nos falta ver qué pasa si el número decimal no tiene ninguno de estos dos tipos de desarrollo, es decir si su desarrollo decimal es infinito no periódico. La respuesta es que estos últimos tipos de números decimales no se pueden representar como fracción y esto da pie a una nueva ampliación del campo numérico para incluirlos obteniendo así los llamados **números reales…**

1.4) NÚMEROS REALES

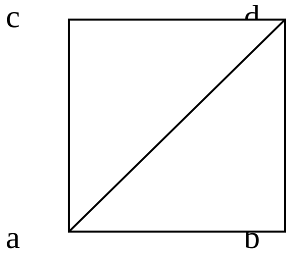
Hemos visto que los números racionales pueden identificarse con los números decimales periódicos (pues aquellos que tienen desarrollo decimal finito se los puede escribir con período 0). Ahora bien, es posible construir expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas; pero una expresión de este tipo no puede representar a un número racional. La pregunta aquí es…

¿Hay alguna razón para ampliar nuevamente el concepto de número, agregando a Q las expresiones decimales con infinitas cifras no periódicas?

Históricamente, los distintos tipos de números fueron surgiendo por la necesidad de medir. Medir conjuntos finitos contándolos: los números naturales; medir trueques no equitativos: números enteros; medir partes de una unidad: fracciones. Veamos ahora un problema geométrico cuya resolución involucra un número no racional:

Se desea dividir un campo cuadrado de 1 km de lado en dos partes iguales, de forma tal que el alambrado una dos vértices no consecutivos. ¿Cuánto alambrado se necesita?

Realizando un bosquejo de la situación:



Debemos hallar la longitud de $\overline{ad}$, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo abd cuyos catetos son $\overline{ab} = \overline{bd} = 1km$. Luego, utilizando el Teorema de Pitágoras, resulta que:

$$\left(\overline{ad}\right)^2 = \left(\overline{ab}\right)^2 + \left(\overline{bd}\right)^2$$

Reemplazando

$$\left(\overline{ad}\right)^2 = 1km^2 + 1km^2 = 2km^2$$

Entonces, para encontrar la solución debemos obtener un número cuyo cuadrado sea 2.

Supongamos que existe un número racional d tal que $d^2 = 2$. Como es racional, entonces existen dos números enteros primos entre sí, m y n, $n \neq 0$, tal que

$$d = \frac{m}{n}$$

Resumiendo, buscamos enteros m y n, primos entre sí, tal que:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

Operando, obtenemos:

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$m^2 = 2n^2$$

Utilizando el Teorema Fundamental de la Aritmética, tanto m^2 como $2n^2$ tienen la misma descomposición como producto de números primos. (*)
Ahora bien, si 2 es k veces factor de m entonces 2 es 2k veces factor de m^2 (¿por qué?). El mismo razonamiento para n^2, hace afirmar que 2 es 2h veces factor de n^2, con lo que 2 es 2h+1 veces factor de $2n^2$. Este hecho contradice lo afirmado en (*).
¿De donde surge la contradicción? De suponer que existe un número racional cuyo cuadrado es 2.

¿Qué conclusión podemos obtener? Existen medidas que no pueden representarse por números racionales, de la misma forma que existen números decimales que no pueden representarse como fracción.

Esto conduce a la necesidad de ampliar el conjunto de números racionales, incluyendo a aquellos que no pueden ser representados por una fracción. Este nuevo conjunto se llama conjunto de **números reales** (**R**).

Definición: llamaremos número real a toda expresión del tipo

$$a = a_0,a_1a_2 \ldots a_n \ldots \quad (1)$$

o del tipo

$$a = -a_0,a_1a_2 \ldots a_n \ldots \quad (2)$$

con infinitas cifras decimales (periódicas o no), donde a_0 es la notación posicional decimal de un entero positivo o nulo, y a_1, a_2, a_3 ... son cifras tales que $0 \leq a_j \leq 9$, para todo $i \geq 1$.

Si a es del tipo (1) diremos que a es **no negativo** ($a \geq 0$). Si además $a \neq 0$, se dice que a es **positivo** ($a > 0$)
Si a es del tipo (2) diremos que a es **no positivo** ($a \leq 0$). Si además $a \neq 0$, se dice que a es **negativo** ($a < 0$)

Si a es un decimal periódico, hemos visto que podemos encontrar una fracción que lo represente y por lo tanto pensarlo como número racional.

Si a es un **decimal no periódico** diremos que es un **número irracional**.

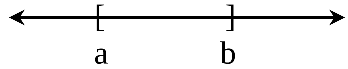
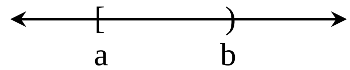
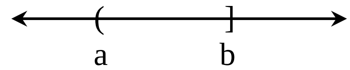
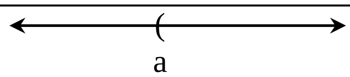
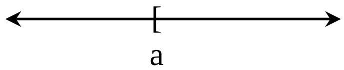
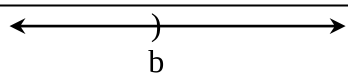
Es posible demostrar que **R** es una ampliación de **Q**, en el sentido que se definen en R dos operaciones, suma y producto, de forma tal que:

1- Si se opera entre racionales (reales particulares) entonces las operaciones dan el mismo resultado, sea que se apliquen las reglas de operar entre reales, sea que se apliquen las reglas de operar entre racionales.
2- Siguen permaneciendo en **R** la mismas propiedades básicas (axiomas) algebraicas y de orden de **Q**.

Debemos dejar en claro que definir en **R** la suma, el producto y el inverso de un real no nulo (respetando lo ya establecido en **Q**), no es muy sencillo. Se utilizan para ello aproximaciones racionales. Se llega a una conclusión importante: *los resultados de las operaciones se aproximan tanto como se quiera a los resultados exactos, con tal de operar con un número suficientemente grande de cifras decimales*.

Intervalos

Una forma usual de indicar conjuntos de números reales es a través de la notación de intervalos.

Símbolo:	***Se lee***	***Conjunto que representa:***	***Representación en la recta numérica:***
(a; b)	Intervalo abierto de extremos a y b	$\{x \in \mathbf{R} / a < x < b\}$	
[a; b]	Intervalo cerrado de extremos a y b	$\{x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b\}$	
[a; b)	Intervalo semiabierto o semicerrado de extremos a y b	$\{x \in \mathbf{R} / a \leq x < b\}$	
(a; b]	Intervalo semiabierto o semicerrado de extremos a y b	$\{x \in \mathbf{R} / a < x \leq b\}$	
(a; +∞)	Intervalo abierto infinito de extremo inferior a	$\{x \in \mathbf{R} / x > a\}$	
[a; +∞)	Intervalo cerrado infinito de extremo inferior a	$\{x \in \mathbf{R} / x \geq a\}$	
(-∞; b)	Intervalo abierto infinito de extremo superior b	$\{x \in \mathbf{R} / x < b\}$	

(-∞; b]	Intervalo cerrado infinito de extremo superior b	$\{x \in \mathbf{R} / x \leq b\}$	] b

Ejemplos:
Los intervalos se utilizan para indicar las soluciones de una inecuación dentro del conjunto de los números reales, ya que es imposible enumerarlas a todas.

1- Resolver **2x – 3 < x + 3**

Este primer caso lo resolveremos utilizando paso a paso los teoremas demostrados sobre desigualdades:
Sumemos miembro a miembro 3 y operemos:

$$2x - 3 + 3 < x + 3 + 3$$
$$2x < x + 6$$

Restemos miembro a miembro x

$$2x - x < x + 6 - x$$
$$x < 6$$

Luego, la solución son todos los números reales menores que 6 que se indica:

$$\mathbf{S = (-\infty; 6)}$$

2- Resolver **(x – 1)(2x + 3) > 0**

En este caso no podemos dividir por ninguno de los dos factores, ya que serán positivos o negativos según los valores que tome x. Observemos que buscamos que valores reales de x hacen que el producto de x – 1 por 2x +3 sea positivo; sabemos que esto sucede solo si ambos factores son positivos o ambos factores son negativos. Escribiendo esto en símbolos:

$$(x - 1 > 0 \text{ y } 2x + 3 > 0) \text{ o } (x - 1 < 0 \text{ y } 2x + 3 < 0)$$

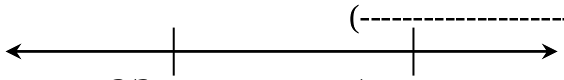
Luego hemos traducido la inecuación dada en 4 inecuaciones sencillas de resolver:

$$(x > 1 \text{ y } x > -\frac{3}{2}) \text{ o } (x < 1 \text{ y } x < -\frac{3}{2})$$

Si realizamos la representación en la recta numérica de las condiciones del primer paréntesis obtenemos:

(------------------------------------

(----------------------



-3/2 1

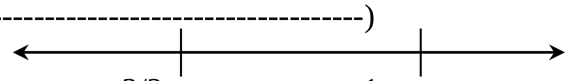
Luego las dos condiciones se verifican en el intervalo

$$(1; +\infty)$$

Realizando lo mismo para el segundo paréntesis:

---------------)

----------------------------------)



-3/2 1

y las dos condiciones se cumplen en el intervalo:

$$(-\infty; -\frac{3}{2})$$

Por lo tanto los valores reales que verifican la inecuación planteada son:

$$\mathbf{S = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; +\infty)}$$

El símbolo “∪” significa “unión”, este se utiliza entre dos conjuntos para indicar que se consideran los elementos que forman parte tanto de un conjunto como del otro.

3- Resolver **$(x – 1)(2x + 3) \geq 0$**

Esta inecuación es casi equivalente a la anterior, solo que debemos considerar aquellos valores de x para los cuales el producto resulta cero. El procedimiento de resolución es análogo, pero la solución final es:

$$\mathbf{S = (-\infty; -\tfrac{3}{2}] \cup [1; +\infty)}$$

4- Resolver **$(x – 2)(2 – x) \leq 0$**

El procedimiento para resolver esta inecuación es análogo a los anteriores, lo que hay que tener en cuenta es que ahora se necesita que el producto sea negativo o cero, con lo que ambos factores deben tener distinto signo y las opciones que resultan son:

$$(x – 2 \leq 0 \text{ y } 2 – x \geq 0) \text{ o } (x – 2 \geq 0 \text{ y } 2 – x \leq 0)$$

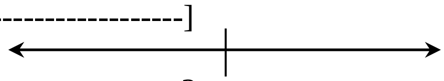
Luego

$$(x \leq 2 \text{ y } 2 \geq x) \text{ o } (x \geq 2 \text{ y } 2 \leq x)$$

Realizando la representación en la recta numérica:

Primer paréntesis

------------------]
-------------------]

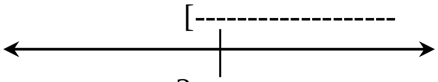


2

luego los valores que verifican son $(-\infty; 2]$

Segundo paréntesis

[-----------------
[-------------------



2

luego los valores que verifican son $[2; +\infty)$

Por lo tanto la solución buscada es

S = **R** (¿por qué?)

Observemos que $(x – 2)(2 – x) = (x – 2)(-1)(x – 2) = -(x – 2)^2$, que resulta ser siempre negativo o cero.

5- $\dfrac{x}{x-1} \leq 0$

Debemos encontrar todos los valores reales que verifiquen que la fracción sea negativa o cero; para ello deben ser numerador y denominador de distinto signo y el numerador puede ser cero, luego obtenemos:

$$(x \leq 0 \text{ y } x – 1 > 0) \text{ o } (x \geq 0 \text{ y } x – 1 < 0)$$

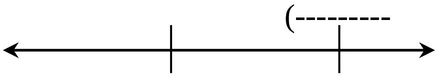
o sea

$$(x \leq 0 \text{ y } x > 1) \text{ o } (x \geq 0 \text{ y } x < 1)$$

Representando en la recta numérica:

Primer paréntesis

---------------]
(---------



0 1

y no existen números reales que verifiquen las dos condiciones.

Segundo paréntesis

[-----------------------
----------------------------)

0 1

y los valores reales que verifican las dos condiciones pertenecen a [0; 1)

Luego

S = [0; 1)

6- $\dfrac{2x+3}{2-x} \geq 2$

En este caso debemos primero restar miembro a miembro 2 y operar (¿por qué?):

$$\frac{2x+3}{2-x} - 2 \geq 2 - 2 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{2-x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-2(2-x)}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-4+2x}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-1}{2-x} \geq 0$$

Con esta última inecuación procedemos de forma análoga al ejemplo anterior, salvo que aquí necesitamos la fracción positiva o cero, luego obtenemos el sistema de inecuaciones:

(4x – 1 ≥ 0 y 2 – x > 0) o (4x – 1 ≤ 0 y 2 – x < 0)

o sea

(x ≥ 1/4 y x < 2) o (x ≤ 1/4 y x > 2)

Representando en la recta numérica

Primer paréntesis

[------------------------
--------------------------------)

¼ 2

o sea que los reales del intervalo [1/4; 2) son solución

Segundo paréntesis

-------------]

(-------

¼ 2

donde no existen reales que verifiquen las dos condiciones.

Luego la solución es

S = [1/4; 2)

<u>Valor absoluto o módulo</u>

El valor absoluto o módulo de un número real se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es decir que si el número real es positivo o cero su módulo es el mismo número, si es negativo su módulo es el opuesto del número.

Ejemplos:

$|2| = 2$ $\qquad |-3| = -(-3) = 3$ $\qquad |0| = 0$

Propiedades:

1- $|a| \geq 0$, para todo $a \in$ **R y** $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$

2- $||a|| = |a|$, para todo a $\in$ **R**
3- $|a| = |-a|$
4- Distributiva respecto de la multiplicación y división:

$$|a.b| = |a|.|b| \quad \text{y} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

5- Desigualdad triangular:
$|a + b| \leq |a| + |b|$
6- Módulo de una potencia:
$|a^n| = |a|^n$, para todo n $\in$ **N,** y si n es par $|a|^n = a^n$
7- Propiedades importantes para resolver ecuaciones e inecuaciones con módulo
Si $b \geq 0$, $|a| = b$ si y solo si ($a = b$ y $a = -b$)
Si $b \geq 0$, $|a| < b$ si y solo si ($a < b$ y $a > -b$)[3]
Si $b \geq 0$, $|a| > b$ si y solo si ($a > b$ o $a < -b$)

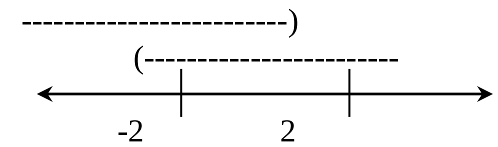
Ejemplos:
Las propiedad 7 se utiliza para resolver ecuaciones o inecuaciones donde la incógnita está afectada por el módulo. Al aplicarla se dice que se "abre el módulo".

1- $|x| = 2$

Por la propiedad 7, se tiene que **x = 2 o x = -2**

2- $|x| < 2$

Por la propiedad 7 se tiene que x < 2 y x > -2. Realizando la representación en la recta numérica:

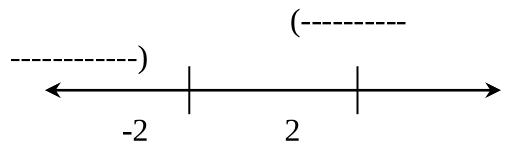


Luego los números reales que verifican ambas condiciones pertenecen al intervalo:

S = (-2; 2)

3- $|x| > 2$

Por la propiedad 7 se tiene que x > 2 o x < -2. Realizando la representación en la recta numérica:



Luego los números reales que verifican ambas condiciones pertenecen a:

S = $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

4- $|x| < -3$

En este caso buscamos qué números reales tienen su valor absoluto menor que –3 y la respuesta es: ninguno. Luego

S = $\varnothing$

5- $|x| > -3$

¿Qué números reales tienen el valor absoluto mayor que –3? TODOS. Luego

S = R

6- $|x| = -3$

[3] *La doble desigualdad (a < b y a > -b) se puede expresar como –b < a < b*

Aquí es S = ∅ (¿por qué?)

7- $|2x - 5| < 6$

Buscamos qué números reales hacen que 2x – 5 tenga valor absoluto menor que 6. Hemos visto que esto sucede solo si:

$$2x - 5 < 6 \text{ y } 2x - 5 > -6$$

Luego

$$x < \frac{11}{2} \text{ y } x > -\frac{1}{2}$$

Con lo que:

$$S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

8- $5 - |3 - 4x| < 3$

En este caso se debe primero obtener una inecuación que compare el valor absoluto con un número, para ello:

i) restamos miembro a miembro 5

$$5 - |3 - 4x| - 5 < 3 - 5$$
$$-|3 - 4x| < -2$$

ii) multiplicamos miembro a miembro por –1

$$|3 - 4x| > 2$$

Ahora procedemos según la propiedad 7 y tenemos:

$$3 - 4x > 2 \text{ o } 3 - 4x < -2$$
$$x < \frac{1}{4} \text{ o } x > \frac{5}{4}$$

O sea que

$$S = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$$

Distancia entre dos puntos de la recta

Sean x_A y x_B las coordenadas de los puntos A y B sobre la recta r. Se define distancia de A a B al valor absoluto de la diferencia entre x_A y x_B.

En símbolos

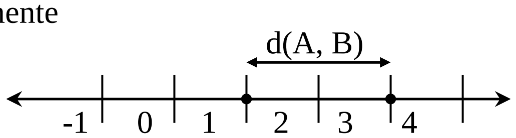
$$d(A, B) = |x_A - x_B|$$

Ejemplos:

1- Sean A y B puntos sobre una recta, cuyas coordenadas son respectivamente 1 y 3. Luego la distancia entre ellos es:

$$d(A, B) = |1 - 3| = |-2| = 2$$

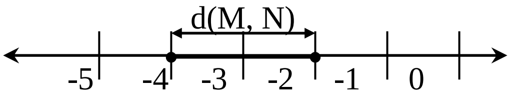
Gráficamente



2- Sean M y N puntos sobre una recta cuyas coordenadas son respectivamente –2 y –4. La distancia entre M y N es:

$$d(M, N) = |-2 - (-4)| = |-2 + 4| = |2| = 2$$

Gráficamente



Observaciones:
Por propiedades del valor absoluto sabemos que $|x_A - x_B| = |x_B - x_A| = d(B, A)$. O sea que, como cabe esperar:

$$d(A, B) = d\ (B, A)$$

Si consideramos la distancia de cualquier punto A de una recta r al punto que elegimos como origen de coordenadas (O), se tiene que:

$$d(A, 0) = |x_A - x_O| = |x_A - 0| = |x_A|$$

Es decir, que la distancia de cualquier punto de la recta al origen del sistema de coordenadas es igual al valor absoluto de su coordenada.

Vamos a ver algunos enunciados relacionados con la potenciación que nos serán útiles para el próximo tema:

Teorema 3.1: Si a y b son reales (de cualquier signo), resulta:

$$a^n = b^n \Leftrightarrow a = b, \text{ si n es impar}$$
$$a^n = b^n \Leftrightarrow |a| = |b|, \text{ si n es par}$$

Teorema 3.2: si a y b son reales no negativos, entonces, para cualquier n natural se tiene:

$$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$$

Teorema 3.3: si a y b son reales (de cualquier signo) y n es un natural, resulta

$$a^n < b^n \Leftrightarrow a < b \quad \text{si n es impar}$$
$$a^n < b^n \Leftrightarrow |a| < |b| \quad \text{si n es par}$$

<u>Potenciación y sus operaciones inversas</u>
Hemos definido en el conjunto de los números naturales la potenciación como:

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a.\ a.\ \dots\ a}_{n\ veces}}$$

donde a se llama **base**, n **exponente** y a^n es la **potencia**; y tanto a como n son números naturales.
Esta definición se puede extender para $a \in \mathbf{R}$. Pero si deseamos que n, el exponente, pueda tomar valores no naturales la definición se modifica y los valores de la base se restringen. Así:
Si n = 0, entonces debe ser $a \neq 0$ y se define

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

Si $n \in \mathbf{Z}$ y $n < 0$, se define

$$\boldsymbol{a^n = (a^{-1})^{-n}}$$

donde $-n \in \mathbf{N}$
Antes de seguir extendiendo la definición de potencia, vamos a desarrollar una de sus operaciones inversas.

Consideremos la ecuación:

$$\boldsymbol{x^n = a}$$

donde a es un número real cualquiera y $n \in \mathbf{N}$. Buscamos las eventuales soluciones de dicha ecuación, es decir los números reales que elevados a n den a como resultado. Estas soluciones se llaman **raíces del número real a**, y precisamente **raíces n–ésimas de a**. Si n = 2, se habla de raíces cuadradas, si n = 3, 4, 5, ... se habla de raíces cúbicas, cuartas, quintas, ...etc.

Dado un número real a, no siempre existen raíces n–ésimas reales para cualquier natural n. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = -1$ no tiene raíces en **R**, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea –1. Pero si a ≥ 0, la ecuación tiene siempre una y solo una raíz real no negativa.

Definición: si a ≥ 0, la raíz real no negativa de $\boldsymbol{x^n = a}$ se llama **raíz n–ésima principal** de a y se indica con el símbolo $\sqrt[n]{a}$. El número natural n se llama índice de la raíz y el número real no negativo a se llama radicando.

Entonces por definición, **el símbolo** $\sqrt[n]{a}$ ($a \geq 0$) **denota la raíz real no negativa (existente y única) de la ecuación** $\boldsymbol{x^n = a}$.

De esta definición se deduce que: $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Analizaremos ahora las posibles raíces reales de la ecuación $x^n = a$, es decir las posibles raíces n–ésimas de un número real a cualquiera (positivo, negativo o nulo).

Caso 1: a > 0 y n impar
La ecuación $x^n = a$ tiene exactamente la raíz $\sqrt[n]{a}$, que resulta positiva

Caso 2: a > 0 y n par
La ecuación $x^n = a$ tiene exactamente dos raíces opuestas $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$

Caso 3: a < 0 y n impar
La ecuación $x^n = a$ tiene exactamente la raíz $-\sqrt[n]{-a}$

Caso 4: a < 0 y n par
La ecuación $x^n = a$ no tiene ninguna raíz en **R**, porque las potencias de exponente par son siempre no negativas.

Por lo tanto, si a ≥ 0 (casos 1 y 2), la ecuación $\boldsymbol{x^n = a}$ puede escribirse como

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

y por el teorema 3.3 se tiene:

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a} \qquad \text{si n es impar}$$

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \Leftrightarrow |x| = \sqrt[n]{a} \qquad \text{si n es par}$$

Ejemplos:

1- La solución de $x^3 = 8$ es x = 2
2- La ecuación $(x - 4)^4 = 16$ es equivalente a las ecuaciones
$$x - 4 = 2 \quad \text{o} \quad x - 4 = -2$$
O sea que sus soluciones son
$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = 2$$
3- La solución de $x^5 = -243$ es $x = -\sqrt[5]{243}$ o sea x = -3
4- La ecuación $(3x - 5)^6 = -64$ no tiene solución en **R**.

Por convención la única raíz a de índice impar de un número a < 0, será indicada con el mismo símbolo usado para la raíz principal: $\sqrt[n]{a}$ (a negativo, n impar).
Por ejemplo, indicaremos $\sqrt[3]{-27}$ en vez de $-\sqrt[3]{27}$

Podemos resumir los casos anteriores en el siguiente teorema:

Teorema 3.4: Propiedad de la simplificación. Para todo $x \in$ **R:**

Si n es impar: $\sqrt[n]{x^n} = x$

Si n es par: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

Ejemplos:

1- La inecuación $x^3 < 5$ tiene las soluciones $x < \sqrt[3]{5}$, o sea $S = (-\infty; \sqrt[3]{5})$
2- La inecuación $x^3 < -2$ tiene las soluciones $x < \sqrt[3]{-2}$, es decir $x < -\sqrt[3]{2}$; por lo tanto $S = (-\infty; -\sqrt[3]{2})$
3- La inecuación $x^2 < 3$ tiene las misma soluciones que $|x| < \sqrt{3}$ o sea que $x < \sqrt{3}$ y $x > -\sqrt{3}$. Luego $S = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$
4- La inecuación $x^2 > 3$ tiene las mismas soluciones que $|x| > \sqrt{3}$, o sea que $S = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

Dado que las raíces de índice impar de números negativos se reducen a por definición a opuestos de raíces principales de números positivos, podemos limitarnos a hablar de las operaciones entre raíces principales suponiendo que todos los *radicandos considerados sean reales positivos cualesquiera* y los índices, números naturales.

Propiedades de la radicación:

1- Distributiva respecto de la multiplicación $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

2- Distributiva respecto de la división $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3- Raíz de otra raíz $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

Ejemplos:

1- $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, por la propiedad 1

2- $\sqrt[7]{2}.\sqrt[7]{2^6} = \sqrt[7]{2.2^6} = \sqrt[7]{2^7} = 2$, por la propiedad 1

3- $\sqrt[4]{a^4.b} = \sqrt[4]{a^4}.\sqrt[4]{b} = |a|.\sqrt[4]{b}$, por la propiedad 1. En este caso hay que tener en cuenta que no se conoce si a es positivo o negativo.

4- $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, por la propiedad 2.

5- $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$, por la propiedad 3

Podemos ahora definir la potencia de exponente racional:

Definición: sea $a \in$ **R**, $a > 0$, $r \in$ **Q**, $r = \frac{m}{n}$, con $m \in$ **Z** y $n \in$ **N**, se define:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplos: $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$ $\quad$ $5^{-2/3} = \sqrt[3]{5^{-2}}$

Esto es muy conveniente porque suele ser más simple operar con potencias de exponente racional que con radicales, ya que ***los exponentes racionales tienen las mismas propiedades que los exponentes enteros***, a saber:

Sean n y m números racionales y a y b reales positivos, luego

1- Potencia de otra potencia $(a^n)^m = a^{nm}$

2- Propiedad distributiva respecto de la multiplicación $(a.b)^n = a^n.b^n$

3- Propiedad distributiva respecto de la división $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

4- Producto de potencias de igual base $a^n.a^m = a^{n+m}$

5- Cociente de potencias de igual base $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

6- $n < m \Leftrightarrow a^n < a^m$, si $a > 1$

7- $n < m \Leftrightarrow a^n > a^m$, si $0 < a < 1$

8- $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$, si $n > 0$

9- $a < b \Leftrightarrow a^n > b^n$, si $n < 0$

Ejemplos:

1- $\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{1/6}}{2^{1/3}} = 2^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1-2}{6}} = 2^{-1/6}$

2- $2^{3/5}.3^{3/5} = (2.3)^{3/5} = 6^{3/5}$

3- Demostrar, sin calculadora, que $\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^3} < \sqrt[3]{\left(\frac{9}{4}\right)^5}$

Usando las propiedades 6 y 8, comparando estos dos números con un tercero:

$$\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} = \left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}$$

Como $\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^3} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3/2}$, $\frac{7}{4} < \frac{9}{4}$ y $\frac{3}{2} > 0$ resulta, por la propiedad 8, que

$$\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^3} < \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} \qquad (*)$$

Como $\sqrt[3]{\left(\frac{9}{4}\right)^5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{5/3}$, $\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$ y $\frac{9}{4} > 1$ resulta, por la propiedad 6, que

$$\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} < \sqrt[3]{\left(\frac{9}{4}\right)^5} \qquad (**)$$

Utilizando la propiedad transitiva de la relación de orden , según (*) y (**), se tiene que

$$\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^3} < \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} < \sqrt[3]{\left(\frac{9}{4}\right)^5} \quad \text{por lo tanto} \quad \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^3} < \sqrt[3]{\left(\frac{9}{4}\right)^5}$$

Para terminar de extender la definición de potencia, debemos considerar que el exponente sea un número irracional. En este caso se define a^s con s irracional a través del uso de ***aproximaciones racionales sucesivas de s***.

Veamos dos ejemplos:
$\mathbf{2^{\pi}}$? → 2^3 → $2^{3,1}$ → $2^{3,14}$ → $2^{3,14}$ → $2^{3,141}$ → $2^{3,1416}$ …
No hay dudas de que esta potencia es positiva.
En cambio…
$\mathbf{(-2)^{\pi}}$? → $(-2)^3$ → $(-2)^{3,1}$ → $(-2)^{3,14}$ → $(-2)^{3,141}$ → $(-2)^{3,1416}$ …
$(-2)^3$ → $(-2)^{(31/10)}$ → $(-2)^{(314/100)}$ → $(-2)^{(31/10)}$ → $(-2)^{(31/10)}$ …
Como se ve, algunas potencias son reales y otras imaginarias. En el primer caso, el signo no es único ya que depende de la paridad del numerador del exponente racional.

Por esto, las potencias de exponente irracional sólo están definidas para bases reales positivas.

Logaritmos

Para resolver la ecuación $x^n = a$, debimos definir la radicación que es la operación por la cual se busca la base a la que hay que elevar a la n-ésima potencia para obtener a. Al querer resolver una ecuación del tipo

$$a^x = b$$

se busca el exponente al que hay que elevar a la base a para obtener el número b. Esta ecuación tiene sentido solo si a es positivo y distinto de 1 (¿por qué?). A la operación a través de la cual se encuentra la solución de la ecuación anterior se conoce como **logaritmo en base a de b** y se escribe:

$$\log_a b$$

Es decir que:

$$\log_a b = x \text{ si y solo si } a^x = b$$

El número real positivo y distinto de 1, ***a***, se llama *base del logaritmo*. El número *b* se llama *argumento*.

Observación: como el argumento de un logaritmo es el resultado de elevar la base positiva a un determinado número, se obtiene que **los argumentos deben ser siempre positivos**. En caso contrario no existe solución.

Ejemplos:

a) $\log_3 9 = 2$ pues $3^2 = 9$
b) $\log_4 2 = ½$, pues $4^{1/2} = 2$
c) $\log_{0.25} 16 = -2$, pues $0,25^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$

Propiedades: consideremos a y b reales positivos distintos de 1, x e y reales positivos, entonces:

1- *Logaritmo de 1 (uno)*: $\mathbf{\log_a 1 = 0}$
Porque $a^0 = 1$, para todo a

2- *Logaritmo de la base:* $\mathbf{\log_a a = 1}$
Porque $a^1 = a$ para todo a

3- *Logaritmo y potencia:* $\mathbf{\log_a(a^x) = x}$ y $a^{\log_a x} = x$
Es obvio, pues vale $\log_a(a^x) = x$ si y solo si $a^x = a^x$ y $\log_a x$ es el exponente al que hay que elevar a la base a para obtener x.

4- *Logaritmo de un producto:* $\mathbf{\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y}$

Dem:

Debemos probar que $a^{\log_a x+\log_a y} = x.y$. En efecto:

$$a^{\log_a x+\log_a y} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Por producto de} \\ \text{potencias de} \\ \text{igual base}}}{=} a^{\log_a x}.a^{\log_a y} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Por la propiedad} \\ 4}}{=} x.y$$

5- *Logaritmo de un cociente:* $\mathbf{\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y}$

Dem:

Debemos probar que $a^{\log_a x-\log_a y} = \dfrac{x}{y}$. En efecto:

$$a^{\log_a x-\log_a y} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Por cociente de} \\ \text{potencias de} \\ \text{igual base}}}{=} \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Por la propiedad} \\ 4}}{=} \frac{x}{y}$$

6- *Logaritmo de una potencia:* $\mathbf{\log_a(x^y) = y.\log_a x}$

Dem:

Debemos probar que $a^{y\log_a x} = x^y$. En efecto:

$$a^{y\log_a x} = a^{(\log_a x).y} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Por potencia de} \\ \text{otra potencia}}}{=} \left(a^{\log_a x}\right)^y \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Por la propiedad} \\ 4}}{=} x^y$$

7- *Propiedad del cambio de base:* $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Dem:

Debemos probar que $a^{\frac{\log_b x}{\log_b a}} = x$. Por la propiedad 4, a = $b^{\log_b a}$ (*), luego tenemos:

$$a^{\frac{\log_b x}{\log_b a}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Sustituyendo (*)}}}{=} \left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{\log_b x}{\log_b a}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Por potencia de} \\ \text{otra potencia}}}{=} \left(b^{\log_b a.\frac{\log_b x}{\log_b a}}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Simplificando en el} \\ \text{exponente}}}{=} b^{\log_b x} = x$$

Ejemplos:

1- $\log_2(16.8) = \log_2 16 + \log_2 8 = 4 + 3 = 7$

2- $\log_3\left(\dfrac{81}{3}\right) = \log_3 81 - \log_3 3 = 4 - 1 = 3$

3- $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 3.2 = 6$

4- $\log_5 \sqrt{125} = \log_5\left(125^{1/2}\right) = \dfrac{1}{2}\log_5 125 = \dfrac{3}{2}$

5- $\log_2 \sqrt[3]{2^4.16} = \dfrac{1}{3}\left(4\log_2 2 + \log_2 16\right) = \dfrac{1}{3}.8 = \dfrac{8}{3}$

6- $\log_{\sqrt{2}}\left(4\sqrt{2}\right) = \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 4 + 1 = 5$

7- $\log_{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{-1}.\frac{4}{9}\right] = -1.\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} + \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{9}\right) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$

8- $\log_{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{1}{5}.25} = \log_{(\sqrt{5})^2}\left(\sqrt{\frac{1}{5}.25}\right)^2 = \log_5\left(\frac{1}{5}.25\right) = -1 + 2 = 1$

Notación: Si la base del logaritmo es 10, se escribe **log x** (se lee "logaritmo decimal") en lugar de $\log_{10}x$. Si la base del logaritmo es el número irracional e (número neperiano) se escribe **ln x** (se lee "logaritmo natural") en vez de $\log_e x$.

Uso de la calculadora
Las calculadoras calculan logaritmos decimales o logaritmos naturales y las teclas son

Si se desea calcular el logaritmo en otra base "a", se utiliza la propiedad de cambio de base, con lo que se obtiene:

$$\log_a x = \begin{cases} \dfrac{\log x}{\log a} \\ \text{o} \\ \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{cases}$$

Ejemplo:
Para calcular $\log_2 33$ podemos calcular:

$$\frac{\log 33}{\log 2} \cong 5{,}0444 \qquad \text{o} \qquad \frac{\ln 33}{\ln 2} \cong 5{,}0444$$

El hecho de que el resultado sea cercano a 5 es esperable ya que $\log_2 32 = 5$.

Los siguientes teoremas nos serán útiles para resolver ecuaciones o inecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Teorema 3.5: $x = x' \Leftrightarrow \log_a x = \log_a x'$
Teorema 3.6: Si $a > 1$, $x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$
Teorema 3.7: Si $0 < a < 1$, $x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$

Observación: estos dos teoremas nos informan que al aplicar logaritmo a ambos miembros de una desigualdad, la misma se mantiene si la base del logaritmo es mayor que 1, sino se invierte.
Ejemplos:

1- Para resolver $\mathbf{2^x = 16}$ se pueden utilizar dos técnicas distintas:
Técnica 1: como $16 = 2^4$, entonces tenemos:

$$2^x = 2^4$$

y por unicidad de la potencia resulta

$$x = 4$$

Técnica 2: aplicando logaritmo en base 2 a ambos miembros, se tiene

$$\log_2(2^x) = \log_2 16$$

Por propiedad de logaritmo (¿cuál?)

$$x.\log_2 2 = 4$$

y como $\log_2 2 = 1$, obtenemos

$$\mathbf{x = 4}$$

2- Para resolver la inecuación

$$\mathbf{0{,}5^x < 10^{-5}}$$

como la incógnita está en el exponente, aplicamos logaritmo en base 0,5 a ambos miembros , como 0,5 < 1, se tiene:

$$\log_{0,5}(0{,}5^x) > \log_{0,5}(10^{-5})$$

Por propiedad del logaritmo, $\log_{0,5}(0{,}5^x) = x$, luego

$$x > -5\log_{0,5}10$$

o sea que

$$\mathbf{S = (-5\log_{0,5}10; +\infty)}$$

3- Para resolver $\log x > 3$, se utiliza la propiedad 6 de potencias, considerando $a = 10 > 1$, luego:

$$10^{\log x} > 10^3$$

Por propiedad de logaritmo, $10^{\log x} = x$, resulta entonces:

$$x > 10^3$$

Y por lo tanto

$$\mathbf{S = (10^3; +\infty)}$$

4- $5.2^x + 2^{x+2} = 18$

En este caso no existen propiedades que permitan operar las potencias con la suma, pero sabemos por la propiedad de producto de potencias de igual base que $2^{x+2} = 2^x.2^2$, luego

$$5.2^x + 2^x.4 = 18$$

Sacando factor común 2^x en el primer miembro:

$$2^x.(5 + 4) = 18$$
$$2^x.9 = 18$$
$$2^x = 2$$
$$\mathbf{x = 1}$$

5- $\log_5(x - 2) = 0$

Para resolver esta ecuación utilizamos la definición de logaritmo y obtenemos que

$$5^0 = x - 2$$
$$1 = x - 2$$
$$\mathbf{x = 3}$$

Observemos que para que esta ecuación tenga solución debe ser $x > 2$, y el valor obtenido lo cumple, luego

$$\mathbf{S = \{3\}}$$

6- $\log_{\sqrt{6}}(x + 5) = 2 - \log_{\sqrt{6}} x$

Para poder proceder como en el ejemplo anterior, primero debemos tener un solo término con logaritmo. Sumemos miembro a miembro $\log_6 x$:

$$\log_{\sqrt{6}}(x + 5) + \log_{\sqrt{6}} x = 2$$

Por propiedad de logaritmo (¿cuál?)

$$\log_{\sqrt{6}}[(x + 5).x] = 2$$

Utilizando la definición de logaritmo

$$\left(\sqrt{6}\right)^2 = (x + 5).x$$
$$6 = x^2 + 5x$$
$$0 = x^2 + 5x - 6$$

que es una ecuación de segundo grado sus soluciones son

$$x = -6 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Pero para ser solución de la ecuación dada debe cumplirse que x + 5 > 0 y x > 0, o sea que x > 0, como x = -6 no lo cumple no es solución. Luego

S = {1}

1.5) <u>NÚMEROS COMPLEJOS</u>

Hemos visto que con los números reales se completa la recta numérica, pero no se solucionan los problemas algebraicos, ya que, por ejemplo, la ecuación:

$$\boldsymbol{x^2 + 1 = 0}$$

sigue sin tener solución en **R**.

¿Qué se necesita para que esta ecuación tenga solución?
Un número cuyo cuadrado sea negativo. Pero incorporar esta condición en **R** es imposible; pues ya hemos demostrado que, en base a los axiomas, todo cuadrado de un número real distinto de cero es positivo.

Luego, lo que se les ocurrió a los matemáticos es sencillo:

Inventemos un número cuyo cuadrado sea –1

Como el objetivo era extender el campo real, se aplican con este nuevo número todas las propiedades ya conocidas de los números reales.
Te proponemos que le asignes un nombre cualquiera (*obviamente ninguno asociado ya a un número real*) y que lo escribas aquí:

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

A partir de ahora, cada vez que aparezca el cuadro $\boxed{\quad}$ debes escribir el nombre que le asignaste a este nuevo número. Recuerda que:

$$\boxed{\quad}^{2} = -1$$

Siguiendo las reglas de operar con números reales, razone cual sería el resultado de:

a) $\boxed{\quad} + \boxed{\quad} =$ b) $\boxed{\quad} \cdot \boxed{\quad} =$ c) $\boxed{\quad} - \boxed{\quad} =$

d) $\boxed{\quad} / \boxed{\quad} =$

En los números reales, cada vez que se realiza una de las operaciones básicas se obtiene como resultado otro número real (propiedad conocida como ley de cierre). ¿Sucede lo mismo con este tipo de números?
Para seguir avanzando en este tema, necesitamos primero ponernos de acuerdo en el nombre que le asignamos al número cuyo cuadrado es –1. Fue Euler el que le asignó el nombre oficial, este es:

$$\boldsymbol{i}$$

Es decir que: $\boldsymbol{i^2 = -1}$

En el ejercicio propuesto has realizado la cuenta:

$$i + i$$

y le asignaste el valor

$$2i$$

En general, se llaman **números imaginarios** a aquellos de la forma

$$\boldsymbol{b.i}$$

donde $b \in \mathbf{R}$

En el ejercicio propuesto has respondido que las operaciones básicas con los números imaginarios no son cerradas. Para la matemática es muy importante que en un conjunto numérico esta propiedad se cumpla.

Si realizamos la siguiente cuenta, siempre siguiendo las reglas aritméticas de los números reales:
$i.(2i + i^4)$
tenemos que $i^4 = i^2.i^2 = -1.(-1) = 1$, luego
$i.(2i + i^4) = i.(2i + 1) = 2i^2 + i = -2 + i$
que ***no es ni un número real ni un número imaginario***.

¿Cómo se soluciona este problema?

Sencillo, definimos un nuevo tipo de números, llamado número complejo, cuya forma es:

$$\boldsymbol{z = a + b.i}$$

con $\mathbf{a \in R}$ **y** $\mathbf{b \in R}$
Al número real *a* se lo llama parte real del número complejo z y se escribe:

$$\boldsymbol{Re(z) = a}$$

Al número real *b* se lo llama parte imaginaria del número complejo z y se lo escribe:

$$\boldsymbol{Im(z) = b}$$

Al conjunto formado por todos los números complejos se lo denomina con la letra C**.**

Observación: si asociamos a cada número real a el número complejo a + 0i, podemos pensar a **R** como un subconjunto de **C**.

Ahora debemos definir en este nuevo conjunto la noción de igualdad, la adición y la multiplicación, de forma tal que si aplicamos estas definiciones a los números reales pensados como complejos **se mantienen las propiedades del conjunto de los reales**.

Definición: si $z = a + bi$ y $w = c + di$
$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
$z \,.\, w = (a + bi).(c + di) = (a.c – b.d) + (a.d + b.c)i$

Observaciones:

1- La definición de suma se basa en que se tienen reglas para operar números reales con números reales y números imaginarios con números imaginarios.
2- La definición de producto surge de aplicar la ***propiedad distributiva*** como la conocemos del campo real:

$$\begin{aligned}(a + bi).(c + di) &= a.c + a.di + bi.c + bi.di = a.c + a.di + b.ci + b.di^2 = \\ &= a.c + a.di + b.ci + b.d(-1) = a.c + a.di + b.ci - b.d = \\ &= (a.c – b.d) + (a.d + b.c)i\end{aligned}$$

Definiciones: si z = a + bi es un número complejo, se define:

$-z$ = -a + (-b)i **opuesto de z**

$\bar{z}$ = a + (-b)i **conjugado de z**

$z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$ $(z \neq 0)$ **inverso de z**

Observaciones:

1- Si $-z$ es el opuesto de z se debe cumplir que $z + (-z) = 0$, y es obvio que se verifica.

2- Si z^{-1} es el inverso de z, se debe cumplir que $z.z^{-1} = 1$, veamos que esto ocurre:

$$z.z^{-1} = z.\ \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{z.\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2-(bi)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Con estos números complejos asociados a z, podemos definir:

Diferencia: z y w complejos, entonces z - w = z + (-w)

División: z y w complejos, w $\neq$ 0, entonces $\dfrac{z}{w} = z.w^{-1}$

Es fácil demostrar que con estas ***definiciones se verifican los axiomas impuestos en los números reales y por lo tanto todos los teoremas que de ellos se deducen***.

Serie de problemas Nº 1

1) Conservando el orden de las cifras 395, intercalar la cifra 0 tal que:
   - el número de 4 cifras resulte el mayor posible
   - el número de 4 cifras resulte el menor posible.

2) La canilla de una bañera está estropeada y pierde 2 litros de agua cada día. Cuando lo arreglaron había perdido 24 litros. ¿Cuántos días estuvo estropeada?

3) Determinar cuáles de los siguientes números son primos: 287, 871, 107.

4) Dado un número natural de 3 cifras, se sabe que la cifra de las centenas es tres y la cifra de las decenas es nueve, y además que es divisible por 3, 4 y 11. Determinar el número.

5) ¿Qué dígitos es necesario colocar en X e Y para que el número "3X5Y" sea divisible por 5 y 9 simultáneamente? (Analizar todas las posibles soluciones)

6) Determinar los números naturales de cuatro cifras que son divisibles por los 10 primeros números naturales.

7) Hallar un número natural sabiendo que el dcm entre 75 y dicho número es 5 y que el mcm entre los mismos dos números es 300.

8) Determinar la centésima parte de $(25 + 15)^2 – (108 – 100)^3 – 88$

9) Calcular la quinta parte de $(23 – 17)^3 + 9^2 – (-3) – (-157 + 147)^2$

10) Un cajón tiene menos de 50 naranjas. Si se cuentan de 11 en 11, sobra una naranja; de 9 en 9 no sobra ninguna. ¿Cuántas naranjas contiene el cajón?

11) En una bodega hay tres toneles de distintas clases de vino, cuyas capacidades son 250, 306 y 504 litros respectivamente. Su contenido se quiere envasar exactamente en cierto número de botellas iguales. Determinar la capacidad máxima de cada una de las botellas necesarias y cuántas botellas se necesitan.

12) Juan, Pedro y Diego deben viajar a la ciudad de Ushuaia y en el avión se hacen amigos. Por razones de trabajo, los tres deberán volver periódicamente. Si se conocen en 1 de marzo de 2004 y Juan viajará cada 8 días, Pedro cada 12 días y Diego cada 15 días. ¿En qué fecha volverán a viajar juntos?

13) Dos libros tienen respectivamente 384 y 480 páginas y están formados por módulos de igual número de páginas. ¿Cuál será el mayor número de páginas que puede contener cada módulo y cuántos de ellos hay en cada libro?

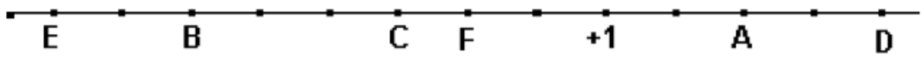
14) Una persona debe colocar 45 libros de matemática y 30 de historia en una biblioteca de manera que cada estante tenga igual cantidad de libros de la misma materia, sin colocar libros de distinta materia en un mismo estante. ¿Cuál será el número total de estantes que necesitará?

15) Calcula el valor absoluto de 5 y el opuesto de -3. Representa en la recta numérica todos estos números.

16) Calcula el valor absoluto de -4 y el opuesto de 1. Representa en la recta numérica todos estos números.

17) Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros: 9, -6, 0, -3, -8, 5, 2.

18) Indica los números que están representados por letras en la recta:



19) Los termómetros de dos lugares diferentes marcan respectivamente 7ºC bajo cero y 12ºC. ¿Cuántos grados de diferencia hay entre ambos lugares?

20) Realiza las siguientes operaciones:
a) 7 - (-5) + (-2) - 9
b) 5 + (-7) - 10 - (-8)

21) Realiza las siguientes divisiones de números enteros:
a) 18 : 6
b) 15 : (-3)
c) (-27) : 9
d) (-24) : (-4)

22) Aplica la propiedad distributiva y escribe cada una de las siguientes multiplicaciones como suma de productos. Después verifica el resultado:
a) 3 . (-5 + 8)
b) 4 . [2 + (-8)]

23) Saca factor común o aplica la propiedad distributiva, según corresponda, y resuelve:
a) -7 . 3 + 4 . (-7)
b) 6 . (-2) - 4 . 6

24) Pitágoras nació en el año 580 antes de Cristo. ¿En qué año murió si vivió 79 años?

25) ¿Cuál es el número que sumado con -18 da 5?

26) Guillermo se baja del ascensor en la 4ta planta y se sienta a esperar su turno para el dentista. Observa como el ascensor sube 3 pisos, luego baja 8, más tarde sube 3, luego sube 5 más, para después bajar 5 y luego bajar 2 más. ¿En qué planta se ha detenido finalmente? Si en pasar de un piso al siguiente tarda 5 segundos, ¿cuánto tiempo ha estado en funcionamiento para hacer el recorrido que ha observado Guillermo?

27) Una caja de bombones tiene 3 pisos y en cada piso hay 12 bombones y otra caja tiene 3 pisos con 10 bombones cada uno. Expresa la suma de los bombones que contiene cada caja como producto de dos factores aplicando la propiedad distributiva. Halla el número total de bombones.

28) El valor de la acción de una empresa de telecomunicaciones ha tenido a lo largo de los últimos días las siguientes fluctuaciones. Comenzó subiendo 2 €, luego volvió a subir 1 €, más tarde bajó 5 €, después subió 6 € para volver a bajar 3 € y por último volvió a subir 4 € más. ¿De cuántos euros ha sido la subida? ¿Y la bajada? ¿Cuál ha sido el balance final?

29) Una empresa debe pagar a dos empleados 120 euros y a otros dos, 130 euros. Expresa la suma de las cantidades que debe la empresa como producto de dos factores aplicando la propiedad distributiva. Halla la cantidad total que debe.

30) Un submarino está sumergido en el mar. Desciende 37 metros, luego 3 y después sube a la superficie que se encuentra a 50 metros de distancia de él. ¿Cuál era la profundidad inicial del submarino?

31) Un edificio está formado por tres sótanos, la planta baja y nueve pisos más. La altura de cada sótano es un metro menor que la de cada piso. El sótano #3 está a una altura de -9 metros. ¿Cuál es la altura del edificio sobre tierra?

32) Para comenzar el curso escolar, Mariana compra en la papelería 3 libros de lectura a $ 7 cada uno, 3 cuadernos de espiral y una carpeta a $ 3 cada uno y por último cambia un diccionario de inglés que costaba $ 27 por dos más elementales de inglés y francés que cuestan $ 14 cada uno. Utiliza una expresión de operaciones combinadas para calcular lo que se ha gastado Mariana en la papelería.

33) Resolver sin utilizar calculadora:

a) $\frac{1}{2}-(-3):\frac{6}{5}+\frac{4}{9}\left(-\frac{3}{8}\right)-1=$

b) $\frac{-2^{-1}}{-\frac{1}{2}+1^{-1}}\left(2^{-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)=$

c) $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}-1}-\left[1:\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]=$

34) ¿Se puede dividir un trozo de hilo entre cuatro personas de manera que una reciba la cuarta parte, otra la novena parte, otra la sexta parte y la última las cinco doceavas partes del hilo?

35) ¿Puede una persona perder 1/3, 1/6, 1/9, 1/12, 1/36 de lo que tiene sin contraer deudas?

36) ¿Cuántas veces está contenido:

d) 1/3 en 3

e) 2/3 en 6/9

f) –3/4 en –2?

37) ¿Cuándo se obtiene más al tomar 5/17 de los 4/3 de una cosa o de los 3/5 de los 7/10 de la misma?

38) Escribir la expresión decimal de cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{50}$ b) $\frac{13}{99}$ c) $\frac{7}{100}$ d) $\frac{23}{90}$

39) Escribir la representación fraccionaria de cada expresión decimal y resolver. Expresar el resultado en forma decimal.

a) $1,3\overset{\frown}{8}+0,\overset{\frown}{5}$

b) $0,0\overset{\frown}{2}.4,5$

c) $0,3\overset{\frown}{9}+0,8.0,\overset{\frown}{5}$

40) ¿Cuántos tornillos tiene un cajón, si se sabe que puede vaciarse sacando de él la mitad de los tornillos, quitando luego la mitad de los que quedan, más un tornillo, y finalmente quitando 9 tornillos más?

41) Una persona gastó $4 menos de 3/5 partes de lo que tenía, luego $3 más de la cuarta parte de los que le quedó, y finalmente $1,20 más de las 2/5 partes de lo que le quedó. ¿Cuánto dinero tenía si después de dichos gastos si después de dichos gastos le sobraron $24?

42) Un comerciante compra mercaderías por valor de $87000. Ha vendido las 2/3 partes de lo que compró, obteniendo un beneficio igual a los dos quintos del precio total de compra. ¿Cuánto cobró por las mercaderías vendidas?

43) Mariana compró 6 kg. de ciruelas para hacer mermelada. El peso del total de los carozos quitados representa un cuarto del peso de las frutas. Añade un peso de azúcar igual al peso de pulpa que queda. La mezcla pierde en la cocción un quinto de su peso. Calcular el número de potes de 375 gramos que puede llenar con la mermelada preparada.

44) ¿Se puede repartir una torta entre 4 personas de tal manera que la primera reciba la cuarta parte, la segunda la octava parte, otra la tercera parte de lo que recibió la primera y la última los 13/3 de lo que recibió la segunda?

45) Se puede repartir un campo entre 4 herederos de modo tal que el primero reciba las dos terceras partes, el segundo los cinco sextos, el tercero la tercera parte de lo que recibió el primero y el último la mitas del tercero?

46) Un terreno se remata dividido en 6 lotes iguales, se presentaron solamente 3 interesados; el primero adquirió 1/4 del terreno total; el segundo 1/2 y el tercero 1/8. ¿Cuántos lotes quedaron sin vender?

47) Cuando a Luis le preguntaron cuánto había gastado de los $7000 que tenía contestó: “Las tres cuartas partes de lo que no gasté”. ¿Cuánto dinero quedó sin gastar?

48) ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles no? Justificar.

$$3\sqrt{2} \qquad -\frac{1}{3} \qquad 7 \qquad 0 \qquad \frac{1}{5} \qquad 0,7 \qquad 1,2 \qquad \sqrt{2}-3 \qquad \sqrt{3}-2+5-\sqrt{3}$$

49) ¿Cuál es el dividendo de una división en la cual puede variar el divisor sin que varíe el cociente?

50) ¿Es $\pi-\frac{10}{3}$ positivo, negativo o cero? Justificar.

51) Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

a) $\sqrt{\dfrac{9}{4}} \notin \mathbf{Q}$ b) $\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$ c) $-6 \in \mathbf{Q}$ d) $\sqrt[3]{8} \in \mathbf{N}$

e) $\pi^2 \in \mathbf{R}$ f) $2\sqrt{2} \in \mathbf{Z}$ g) $2^3 < 9$ h) $-2 > -5$

52) Completar el siguiente cuadro:

Conjunto	Gráfico	Intervalo
$\{x \in \mathbf{R} \,/\, -1 < x < 2\}$		
	$\longleftarrow$ (———] $\longrightarrow$ 0 1	
		$(-3/2;\ +\infty)$
$\{x \in \mathbf{R} \,/\, x \leq 5\}$		
	$\longleftarrow$) ——— [$\longrightarrow$ -1 1	
		$(-3;\ -1) \cup (1;\ 5)$

53) Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $-3x > 9$ b) $6 - 3x < -2$ c) $-1 \leq \dfrac{2x-3}{4} < 5$

d) $x \leq 3x + 2 \leq x + 6$ e) $\dfrac{1}{x} + 3 > 4$ f) $\dfrac{2x-5}{5} - 1 > 3 - x$

54) Resolver las siguientes inecuaciones utilizando la regla de los signos:

a) $x(x - 2) \geq 0$ b) $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ c) $\dfrac{1-x}{x+5} \leq 0$

55) Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $|x - 1| = ½$ b) $\left|x - \dfrac{5}{2}\right| = \sqrt{2}$ c) $|2 - 3x| = 3$

56) ¿Cuál es el conjunto solución de las siguientes desigualdades con valor absoluto?

a) $|x| \leq 3$ b) $|x| > 5$ c) $|x + 2| < ½$

d) $|3x - 2| \geq 3$ e) $\left|\dfrac{1}{2}x + 2\right| \leq 2$ f) $\left|2 - \dfrac{3}{4}x\right| > \dfrac{1}{4}$

g) $|2x - 3| + 4 > 10$

h) $1 < |x + 3| < 4$

57) Encontrar la solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\left|\dfrac{2x+6}{x-2}\right| \geq 3$

b) $\left|\dfrac{2-x}{1+2x}\right| < 3$

c) $\left|\frac{1}{x}+3\right| > 4$

58) Determinar el conjunto de todos los números reales cuya distancia al origen sea igual a 8.

59) Determinar el conjunto de todos los números reales cuya distancia a 5 es mayor o igual que 3.

60) Determinar el conjunto de todos los números reales cuya distancia a -3 sea menor que 5.

61) Decidir cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas. Justificar.

a) $\sqrt[3]{24.5^{13}} = 2.5^4\sqrt[3]{15}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{6}-2$ e) $\sqrt{5+7} = \sqrt{5}+\sqrt{7}$ f) $\sqrt{4} = \pm 2$

g) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2} = \sqrt[5]{2}$ h) $\sqrt[3]{2}\sqrt{2} = \sqrt[5]{2}$ i) $\sqrt[3]{2}\sqrt{2} = \sqrt[6]{2}$

j) $\sqrt[3]{2}\sqrt{2} = \sqrt[6]{32}$ k) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{2}$ m) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

62) Escribir la expresión decimal de las siguientes raíces (*si son números irracionales, escribirlos con 3 cifras significativas*). Operar sin calculadora.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{\frac{25}{16}}$ c) $\sqrt[3]{-1}$ d) $\sqrt[3]{-0{,}027}$

e) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ f) $\sqrt[3]{8^2}$ g) $\sqrt[5]{(-2)^5}$ h) $\sqrt[4]{(-2)^4}$

63) Calcular:

a) $(-27)^{4/3}$ b) $-27^{4/3}$ c) $25^{1/2}$ d) $0{,}0025^{3/2}$

e) $1{,}44^{3/2}$ f) $\left(2^{-3}\right)^{1/3}$ g) $64^{-2/3}$ h) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1/2}$

64) Resolver:

a) $5\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{8}+4\sqrt{18}-3\sqrt{50}+\sqrt{32}$

c) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{9}}-\sqrt{8}$ d) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

e) $\left(5-2\sqrt{3}\right)^2-10(5+2\sqrt{3})+13$ f) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$

65) Determinar el valor de cada una de las siguientes expresiones para el valor de x que en cada caso se indica:

a) $4x^{-1} + \frac{3}{x^{-1}}+\frac{1}{2x^0} - 8x^{1/2} + 4x^{-3/2}$, para x = 4

b) $x^{-1} + (-1)^x + x^0 + 0^x + x^2 - 2^x$, para x = -3

c) $2x^2 - 2x - 1$, para $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

66) **Utilizar una calculadora**, redondeando a 3 cifras decimales, para hallar:

a) $\sqrt[5]{10}$ b) $\sqrt{0,4}+\left(\sqrt{0,9}-\sqrt[3]{0,01}\right)$ c) $\dfrac{\sqrt{31}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

67) Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 = 5$ b) $x^2 = -5$ c) $x^3 = -5$
d) $x^4 = \sqrt{2}$ e) $x^5 = \sqrt{3}$ f) $x^2 = \sqrt{2}-\sqrt{3}$

68) Resolver las siguientes desigualdades:

a) $x^2 < 5$ b) $x^2 \geq 5$ c) $x^3 \leq 3$
d) $x^3 > -3$ e) $x^4 < \sqrt{2}$ f) $9 \geq x^2$
g) $2 < x^2 < 3$ h) $1 \leq x^2 < 2$ i) $-1 < x^3 \leq 1$

69) Reducir a su mínima expresión:

a) $\sqrt[5]{32x^{12}y^{10}}$ b) $\sqrt{72}\sqrt{2x^2}$
c) $\sqrt[4]{512}-\sqrt{50}+\sqrt[6]{128}$ d) $\sqrt[4]{x^4+x^4y^4}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(x + y > 0,\ x > 0)$
f) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}-\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$ $(x > -1)$

70) Aplicando las propiedades de los logaritmos hallar (***sin calculadora***)

a) $\log_3 15 + \log_3(5^{-1})$ b) $\log 0,2 + \log 0,05 - \log(1/10)$
c) $\log_4(\log_{1/4} 0,25)$ d) $\ln e^3 + \ln(e^{-2})$
e) $\ln\left(\sqrt[5]{e}.e^{-3}\right)$ f) $\log_3\left(\dfrac{1}{81}\right)+\dfrac{\log_5\left(\frac{1}{5}\right)}{\log_{1/5} 5}$

71) Si el logaritmo de un número en base 5 es 3/2, ¿cuál es el logaritmo de ese mismo número en base 0,04?

72) ¿Cuál es el número cuyo logaritmo en base k es 2 y en base k/2 es 3?

73) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{5x+2} = 243$ b) $16^{5-x} = 4$ c) $8^{x-2} - 0,125 = 0$
d) $\dfrac{(8^x)^2}{2^{9x}} = \dfrac{1}{64}$ e) $3^{x^2+3x}-\dfrac{1}{9}=0$ f) $\dfrac{3^{x^2}}{9}=3^{2+3x}$

74) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_{12}(4x + 2) = 0$ b) $\log_2(8x) + \log_2(4x^2) = 8$ c) $\log_5(x + 12) - \log_5(x + 2) = 1$
d) $\log_2 x - \log_8 x = 1$ e) $\log(x - 3) + \log x = \log 4$
f) $\log(x - 8) + \log(x - 2) = \log(8 - x)$

75) Hallar, si existen, todos los valores reales de x tales que:

a) $\log_3 x < 2$ b) $\log x > 3$
c) $|\ln x| < 3$ d) $|\log x| \geq 2$

e) $(\ln x)^2 \leq 3$ f) $(\ln x)^3 > \ln 2$
g) $e^{-x} > 2$ h) $3^{1-x} > 7$

76) Se ha obtenido experimentalmente que la presión atmosférica viene dada por la ecuación:

$$P(x) = 0{,}9^x$$

donde x es la altura sobre el nivel del mar. Si la altura se mide en kilómetros, y la presión, en atmósferas hallar la altura a la que hay que subir para que la presión sea de 0,8 atmósferas.

77) La fórmula para calcular el capital final en el interés compuesto es:

$$C(t) = C°.(1 + r)^t$$

donde C° es el capital inicial, r es la tasa de interés anual y t es el tiempo en años. Hallar el tiempo necesario para que el capital se duplique si el interés anual es del 7% (r = 0,07).

78) La masa de un elemento radioactivo viene dada por la ecuación:

$$m(t) = m°.(1/2)^t$$

donde t es el número de períodos de semidesintegración. Si tenemos 30 g de un elemento radioactivo que tiene un período de semidesintegración de 25 años, ¿cuántos años tienen que transcurrir para que tengamos 5 g de dicho cuerpo?

79) Resolver las operaciones indicadas para los siguientes números:

$z_1 = 2 - 3i$ $z_2 = 5 + i$ $z_3 = 2 + 2i$ $z_4 = 4i$ $z_5 = -3$

a) $z_1 + z_2 - z_3$ b) $z_2 - z_4.z_5$ c) $z_1.z_2 - z_4.z_5$ d) $\overline{z_1.z_3 - z_4}$

e) $\overline{z_1}.z_2.\overline{z_4} - z_3$ f) z_3^2

80) Realizar las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{2+i}{(1-2i)(3+i)} - (2-3i)$ b) $1 - 4i - \dfrac{(4+4i)(2-2i)}{-2+i}$

81) Hallar los valores de x que verifican: $x.(2-i) + \dfrac{1-i}{2-2i} = 3x$

82) Decidir si ***1 + i*** es solución de la ecuación $x^4 - ix + 3 + i = 0$

83) Para transportar en **C** la potenciación de **R**, se comienza calculando las potencias naturales del número ***i***, así:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

a) Calcular i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^{10}.
b) Obtener una regla que permita calcular i^n para cualquier $n \in \mathbf{N}$
c) Realizar las siguientes operaciones:

$i^{10} - i^{-10}$ $\dfrac{i^{25} - 2i^{-25}}{3i^{25}}$ $2i^{47} - 3i^{52} + 4i^{95} - 5i^{-300}$ $\dfrac{2i^{123} - 3i^{-145}}{4i^{-150} + 5i^{121}}$

Unidad 2: "Razones y proporciones"

Los objetivos de este tema son:

- *Distinguir entre magnitudes directa e inversamente proporcionales.*
- *Hacer repartos directa e inversamente proporcionales.*
- *Calcular porcentajes.*
- *Calcular directamente aumentos y disminuciones porcentuales.*
- *Resolver distintas situaciones sobre proporcionalidad directa e inversa con dos o más magnitudes y resolver distintos ejercicios sobre porcentajes.*

Veamos primero algunos conceptos…

RAZÓN ENTRE DOS NÚMEROS

Una razón es la **comparación entre dos cantidades**, dados dos números a y b se define como el cociente entre a y b.

La razón entre a y b es $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$

Ejemplo:

En una fiesta hay 18 chicas y 12 chicos. ¿Cuál es la razón entre chicas y chicos? ¿Y entre chicos y chicas?

Razón entre chicas y chicos chicas $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Significa que por cada tres chicas hay dos chicos.

Razón entre chicos y chicas chicos $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Significa que por cada dos chicos hay tres.

No hay que confundir razón con fracción! Si a/b es una **fracción**, entonces a y b son **números enteros** con b ≠ 0, mientras que en la **razón** a/b los números a y b pueden ser **decimales**.

PROPORCIÓN NUMÉRICA

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas. En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c}$$

a y d se llaman **extremos**, b y c **medios**.

Ejemplos:

Calcular el término desconocido de las siguientes proporciones:

1) $\frac{4}{10} = \frac{x}{60}$

$$x = \frac{4.60}{10} = 24$$

2) $\frac{9}{12} = \frac{12}{x}$

$$x = \frac{12.12}{9} = 16$$

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al **multiplicar o dividir una de ellas** por un número cualquiera, **la otra queda multiplicada o dividida** por el mismo número.

Una regla sencilla para identificar una proporcionalidad directa es observar si:

“A **más** corresponde **más** y
a **menos** corresponde **menos**.”

Sin embargo se asegura que una relación es una proporcionalidad directa a través del reconocimiento de su constante de proporcionalidad.

Constante de proporcionalidad

Es importante saber que ***el cociente entre dos variables directamente proporcionales es siempre constante***, dicha constante se denomina “constante de proporcionalidad” y se representa con la letra k:

$$y = k.x$$

Por ejemplo: si tenemos la siguiente expresión: y = 3 x
La constante de proporcionalidad sería **3**.

¿Cómo se calcula la constante de proporcionalidad?

Como **y =k.x** entonces: **k = y / x**

Calcula la constante de proporcionalidad para:

x	3	6	7
y	6	12	14

$$\mathbf{\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = 2}$$

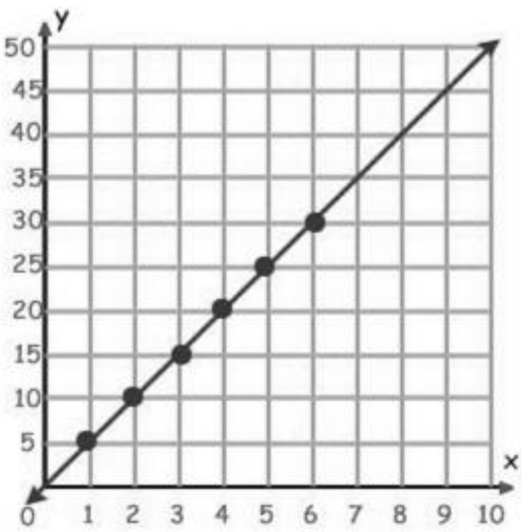
Como el cociente es siempre el mismo (constante) se concluye que **k = 2.**

El gráfico correspondiente a una relación de proporcionalidad directa **es una línea recta** que pasa por el punto de origen de un sistema de coordenadas cartesianas.

En una función de proporcionalidad directa, si una de las variables aumenta, la otra también aumenta **en un mismo factor**; y si una de las variables disminuye, la otra disminuye **en un mismo factor**.

Ejemplo:
Juan ha utilizado 20 huevos para hacer 4 tortillas iguales. ¿Cuántos huevos necesita para hacer 6 tortillas? ¿Y para hacer 2? Grafica los resultados hasta 6 tortillas.

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30



Como puedes ver, el gráfico es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas. Además si nos fijamos en la tabla, nos podemos dar cuenta que el cociente (división) entre las dos magnitudes (y/x) es constante. En este caso el valor de la constante de proporcionalidad es **5**.

Son variables **directamente proporcionales**, el peso de un producto y su precio.

Ejemplo
Si 1 kg de tomates cuesta $50, 2 kg costarán $ 100 y ½ kg costará $ 25
Es decir:
A **más** kilogramos de tomate **más** pesos. A **menos** kilogramos de tomate **menos** pesos.

También son **directamente proporcionales**:
El espacio recorrido por un móvil y el tiempo empleado.
El volumen de un cuerpo y su peso.
La longitud de los lados de un polígono y su área.
Etc…
Aplicaciones de la proporcionalidad directa
- *Regla de tres simple y directa*
- *Repartos directamente proporcionales*

- *Porcentajes*

REGLA DE TRES
La regla de tres puede ser **simple o compuesta.** Es **simple** cuando solamente **dos variables** intervienen en ella; y es **compuesta** cuando intervienen **tres o más variables**.

REGLA DE TRES DIRECTA
Una regla de **tres simple y directa** consiste en, dadas dos variables que son **directamente proporcionales entre sí**, calcular el valor de una de estas variables correspondiente a un valor dado de la otra.
La **regla de tres directa** la aplicaremos solo si tenemos la certeza de que entre las variables se establece una relación de proporcionalidad directa, por lo tanto:

A **más** $\longrightarrow$ **más**.
A **menos** $\longrightarrow$ **menos**.

Una forma muy fácil de resolver un ejercicio de proporcionalidad directa es este procedimiento llamado regla de tres.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{D} C \\ A_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{C}{x} \qquad\qquad x = \frac{A_2 \cdot C}{A_1}$$

Sin embargo la regla de tres se convierte en un procedimiento mecánico, que aunque permite resolver de forma fácil cualquier actividad, no se razona de forma conveniente su resolución.

Reducción a la unidad
Otro procedimiento que podemos llamar de reducción a la unidad, consiste en calcular el valor de la segunda magnitud correspondiente a una unidad de la primera. Este valor es el que se ha llamado anteriormente constante de proporcionalidad. A partir de aquí es más fácil calcular el valor final de la segunda magnitud.

Ejemplo
Un coche ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 minutos. Calcula el tiempo que tardará en recorrer en el mismo circuito 40 vueltas.

I) **Resolución por proporcionalidad** $\frac{105}{60} = \frac{x}{40}$ $\Rightarrow x = 105 \,.\, 40 / 60 = 70$
Solución: 70 minutos.

II) **Regla de tres directa**
Nº vueltas minutos
60 ---------- 105
40 ---------- x
$\Rightarrow$ x = 105 x 40 :60= 70 m

Solución: 70 minutos.

III) **Reducción a la unidad**
Nº vueltas minutos
60 --------- 105
/ 60 ↓ / 60
1 ---------- 1,75
↓ .40 ↓ .40
40 ----------- 70

PROPORCIONALIDAD INVERSA
Dos variables son **inversamente proporcionales** cuando, al **multiplicar o dividir** una de ellas por un número cualquiera, la otra queda **dividida o multiplicada** por el mismo número.

Una regla sencilla para identificar una proporcionalidad inversa es observar si:

“A **más** corresponde **menos** y
a **menos** corresponde **más**.”

Sin embargo se asegura que una relación es una proporcionalidad inversa a través del reconocimiento de su constante de proporcionalidad.

Constante de proporcionalidad
Es importante saber que ***el producto entre dos variables inversamente proporcionales es siempre constante***, dicha constante se denomina “constante de proporcionalidad” y se representa con la letra k:

$$y = k/x \qquad \text{por lo tanto} \qquad k = y.x$$

Además, en una proporcionalidad inversa, si una de las variables aumenta, la otra disminuye **en un mismo factor**; y si una de las variables disminuye, la otra aumenta **en un mismo factor**.

Son variables son inversamente proporcionales.

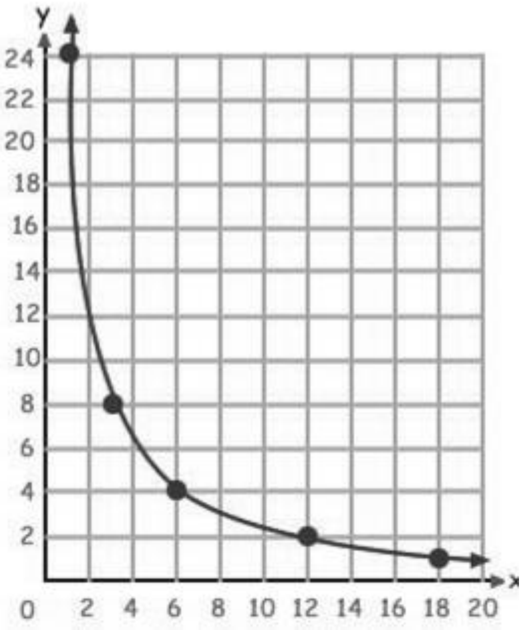
- *El número de albañiles y el tiempo empleado en hacer el mismo edificio.*
- *La velocidad de un auto y el tiempo empleado en recorrrer el mismo trayecto.*
- *Etc…*

Ejemplo
La siguiente tabla indica el número de días (y) necesario para realizar para realizar una obra en relación con el número de personas empleadas (x).

X	3	6	12	1
y	8	4	2	24

3. 8 = 6 . 4 = 12 . 2 = 1 . 24 = **24**
Como el producto es constante (el mismo valor) se concluye que el valor de la constante de proporcionalidad es **24**.

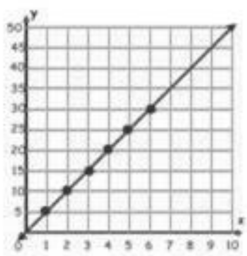
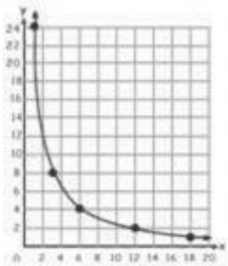
La representación gráfica de esta relación son puntos que pertenecen a una curva llamada **hipérbola**.



Aplicaciones de la proporcionalidad inversa

- Regla de tres simple inversa
- Repartos inversamente proporcionales

Resumen: Observa el siguiente cuadro comparativo:

Proporcionalidad DIRECTA	**Proporcionalidad INVERSA**
Al aumentar o disminuir una de las variables, la otra aumenta o disminuye, respectivamente, en la misma razón. **"A más… más y a menos… menos"**	En una función de proporcionalidad inversa, si una de las variables aumenta, la otra disminuye en un mismo factor; y si una de las variables disminuye, la otra aumenta en un mismo factor. **"A más... menos y a menos... más"**
La gráfica es una **línea recta** que pasa por el origen de coordenadas. 	La gráfica es una curva llamada **hipérbola**. 
Función de la forma: $y = k \cdot x$	Función de la forma: $y = \frac{k}{x}$

REGLA DE TRES INVERSA
Una regla de tres **simple e inversa** consiste en, dadas dos variables **inversamente proporcionales**, calcular la cantidad de una de estas magnitudes correspondiente a una cantidad dada de la otra magnitud.
La **regla de tres inversa** la aplicaremos solo si tenemos la certeza de que entre las variables se establece una relación de proporcionalidad inversa, por lo tanto:

A **más** $\longrightarrow$ **menos**.

A **menos** $\longrightarrow$ **más**.

Una forma muy fácil de resolver un ejercicio de proporcionalidad directa es este procedimiento llamado regla de tres.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{I} C \\ A_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{C}{x} \qquad x = \frac{A_1 \cdot C}{A_2}$$

Sin embargo la regla de tres se convierte en un procedimiento mecánico, que aunque permite resolver de forma fácil cualquier actividad, no se razona de forma conveniente su resolución.

Otro procedimiento que podemos llamar de **reducción a la unidad**, consiste en calcular el valor de la segunda magnitud correspondiente a una unidad de la primera. Este valor es el que se ha llamado anteriormente constante de proporcionalidad inversa. A partir de aquí es más fácil calcular el valor final de la segunda variable.

Ejemplo:
18 alumnos han pagado 40 pesos cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?

Resolución por proporcionalidad
$18 \cdot 40 = 24 \cdot x \quad \Rightarrow x = 18 \cdot 40 / 24 = 30$
Solución: 30 pesos.

Regla de tres inversa

Nº personas		pesos
18	----------	40
24	----------	x

$\Rightarrow x = 18 \cdot 40 / 24 = 30$
Solución: 30 pesos

Reducción a la unidad

Nº personas		pesos
18	----------	40
↓ / 18		↓ x 18
1	----------	720
↓ x 24		↓ : 24
24	----------	30

Solución: 30 pesos

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA
Una actividad de proporcionalidad compuesta relaciona más de dos magnitudes que pueden ser directa o inversamente proporcionales.
Para resolver una actividad de proporcionalidad compuesta se hace de forma ordenada con el procedimiento de reducción a la unidad.

Procedimiento de resolución:
En primer lugar se deja fija la segunda variable y se relaciona la primera con la tercera. En segundo lugar se deja fija la primera variable y se relaciona la segunda con la tercera.

Ejemplo:
Tres motores iguales funcionando 6 horas necesitan 9 metros cúbicos de agua para refrigerarse. ¿Cuántos litros de agua necesitarán 5 motores funcionando 8 horas?

1° variable: número de motores
2° variable: número de horas.
3° variable: número de litros.

Se deja fija la segunda variable.
La primera y la tercera variable son directamente proporcionales entre sí. Más motores necesitarán más litros de agua para refrigerarse.

Se deja fija la primera variable.
La segunda y la tercera variable son directamente proporcionales entre sí. Si funcionan durante más horas necesitarán más litros de agua para refrigerarse.

Motores		Horas		Metros cúbicos
3	------------	6	------------	9
1	------------	6	------------	9 / 3 = 3
5	------------	6	------------	3 . 5 = 15
5	-------------	1	-------------	15 / 6 = 2,5
5	-------------	8	-------------	2,5 . 8 = **20**

Respuesta: 20 metros cúbicos

Intentemos resolver el problema **por proporciones**, verá que es mucho más sencillo…
Llamaremos:

1° variable: número de motores: x
2° variable: número de horas: y
3° variable: número de litros: z

Por lo dicho anteriormente…

$$z = k.x.y$$

El primer paso consiste en calcular la constante de proporcionalidad
k = z / (x.y) = 9 / (3.6) = **0,5**
Es decir que:

$$z = 0,5.x.y$$

Entonces…
z = 0,5.5.8 = **20**

Respuesta: 20 metros cúbicos

¿Se anima a resolver el siguiente problema?
Tres obreros trabajando 8 horas diarias realizan un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando 9 horas?
Respuesta: 8 días

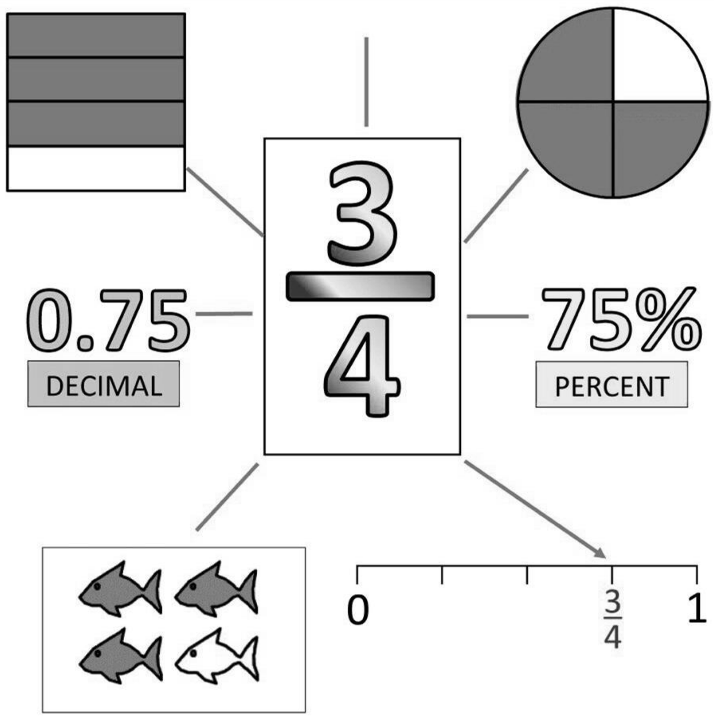
PORCENTAJES
Todos estamos habituados a encontrar información expresada como porcentajes, como el porcentaje de humedad relativa del momento o el porcentaje de descuento en una promoción de un supermercado.
El porcentaje es un número asociado a una razón, por lo tanto es una posible manera de comparar dos cantidades tomando como valor de referencia de una de ellas el valor 100.

Definición: Si comparamos dos cantidades a y b el porcentaje que representa a respecto de b es el antecedente de una razón equivalente a a/b cuyo consecuente es 100.

$$\frac{a}{b} = \frac{\%}{100}$$

Porcentaje quiere decir partes por 100. Cuando dices "por ciento" en realidad dices "por cada 100".
Si decimos que el 60% de los alumnos de un curso vive en la ciudad de Campana estamos diciendo que por cada 100 alumnos, 60 viven en Campana.

Un porcentaje también se puede escribir como un decimal o una fracción…



Calcular el porcentaje de una cantidad
Para calcular el porcentaje de una cantidad se multiplica dicha cantidad por el porcentaje y se divide por 100.
El 20% de 50 = (50 . 20) / 100 = 10

Veamos otro ejemplo:
Calcular el 15% de 200:
(200 . 15) / 100 = 30
Un ejemplo más:
Si hay 10 coches aparcados y 3 son de color amarillo, ¿qué porcentaje (que parte del total) representan estos 3 coches? El total (los 10 coches aparcados) se considera que es el 100 por cien (se representa por 100%).
Para calcular el porcentaje que representan los 3 coches amarillos:

$$\frac{3}{10} = \frac{\%}{100} => \% = \frac{3.100}{10} = 30$$

VARIACIONES PORCENTUALES
Para aumentar o disminuir una cantidad en un porcentaje se calcula cuanto representa dicho porcentaje de esa cantidad y se le suma o resta a la cantidad inicial.

Por ejemplo: aumentar 60 en un 20%.
1.- Calculamos cuanto representa el 20%:
(60 x 20) / 100 = 12
2.- Se lo sumamos al importe inicial:
60 + 12 = 72
Si el cálculo lo hacemos todo junto:
60 + (60 . 20) / 100 = 60 . (1 + 20 / 100) = 60 . 1,2 = **72**

Veamos otro ejemplo:
Disminuir 50 en un 10%.
1.- Calculamos cuanto representa el 10%:
(50 . 10) / 100 = 5
2.- Se lo restamos al importe inicial:
50 - 5 = 45
Si el cálculo lo hacemos todo junto:
50 – (50 . 10) / 100 = 50 . (1 – 10 / 100) = 50 . 0,9 = **45**

Estamos entonces en condiciones de generalizar del siguiente modo…

$$\Delta x = x - x_0$$
$$x = x_0 + \Delta x$$
$$x = x_0(1 + \Delta x/x_0)$$
$$x = x_0(1 + \Delta\%/100)$$

Donde **Δ%** es el **aumento porcentual** (si es negativo es una disminución).

Serie de problemas Nº 2

1) Para cada uno de los siguientes casos indicar si las variables guardan o no una relación de proporcionalidad **directa**.

x	***y***
6/5	9
0,1	3/4
4/5	6
6	45
24/5	36

x	***y***
3/2	3
0,9	5
1	9/2
6	3/4
1/2	9

x	***y***
2/3	4
0,75	9/2
5/6	5
1,111…	20/3
0,1	3/5

x	***y***
2,5	5
3/4	1,2
0,888…	4/5
7/3	2,1
1,2	6/5

2) Las siguientes tablas corresponden a funciones de proporcionalidad **directa**. Para cada una hallar la constante de proporcionalidad, completarlas y representarlas gráficamente.

x	***y***
2	
4	
8	6
12	
20	

x	***y***
2	1
4	
6	
8	
10	

x	***y***
3	
6	
9	
12	8
15	

3) Una canilla llena una pileta de 5400 litros en 5 horas. Hallar una fórmula que exprese el volumen de agua que arroja la canilla (en litros) como una función del tiempo (en minutos).
a. ¿Cuántos litros arroja en 18 minutos? ¿y cuántos en 2 horas y 40 minutos?
b. ¿Cuánto tarda en arrojar 1300 litros? ¿y cuánto en arrojar 3420 litros?

4) En los siguientes problemas plantear la proporción correspondiente y resolver.
a. Un automóvil consume 28 litros de combustible para recorrer 350 km. ¿Cuántos km recorre con 12 litros?
b. Para preparar una masa de pizza, se utilizan 420 g de levadura cada 15 kg de harina. ¿Cuántos gramos de levadura llevan 8 kg de harina?
c. Para pintar 27 m^2 de pared, se necesitan 15 litros de pintura. ¿Qué superficie se puede pintar con 25 litros de pintura?

5) En un colegio comenzaron las clases 500 alumnos. La sociedad cooperadora gastó $3500 en el comedor escolar en los 22 días hábiles del primer mes de clases. Si el número de alumnos aumenta en 2/25. ¿Cuánto gastará la cooperadora en un mes de 25 días hábiles?

6) Una empresa desea repartir $135.800 entre sus 7 empleados de modo que la cantidad que cada uno reciba sea directamente proporcional al número de integrantes que tiene su familia. Hallar la expresión matemática que permita calcular el importe que recibe una familia como una función de su número de integrantes y complete la tabla.

Familia	Rodríguez	Torreta	Ferrari	Lujan	Acevedo	Portino	Cuenca
Integrantes	8	5	4	6	2	7	3
Importe							

7) Para cada uno de los siguientes casos indicar si las variables guardan o no una relación de proporcionalidad **inversa**.

x	*y*
1,8	2
3/5	0,4
0,666…	2/5
1/3	3,5
1,555…	3/4

x	*y*
3/4	1/2
0,45	5/6
0,5	3/4
0,666…	9/16
1/4	1,5

x	*y*
1/2	8
0,1	40
4/3	3
0,8	50
5/6	4,8

x	*y*
2/15	2
0,15	9/4
1/6	2,5
0,222…	10/3
0,02	3/10

8) Las siguientes tablas corresponden a funciones de proporcionalidad **inversa**. Para cada una hallar la constante de proporcionalidad, completarlas y representarlas gráficamente.

x	*y*
2	
3	
4	
8	6
12	

x	*y*
1	
2	
3	4
4	
6	

x	*y*
1	
3	
4	6
6	
8	

9) Un turista desea visitar una ciudad para lo cual deberá desplazarse 480 km y decide hacerlo en tren.

a. Hallar una fórmula que permita calcular la velocidad media necesaria del tren (en km por hora) como una función del tiempo deseado para llegar (en horas).

b. ¿Cuánto tardará en llegar si viaja a 80 km/h? ¿y si lo hace a 60 km/h?

c. ¿A qué velocidad debe ir para llegar en 4 horas? ¿y para llegar en 5 horas y 20 minutos?

10) En los siguientes problemas plantear la proporción y resolver.

a. Las ruedas delanteras de un automóvil miden 0,8 m de diámetro y las traseras 1,4 m. Si en una cierta distancia una rueda delantera da 504 vueltas, ¿cuántas vueltas dará una trasera?

b. Una máquina que envasa alfajores funciona 12 horas diarias durante 8 días para cumplir con un pedido. ¿Cuántas horas diarias deberá funcionar para cumplir con el pedido en 6 días?

c. Para cubrir las paredes de un baño se necesitan 120 azulejos de 8 dm^2. ¿Cuántos azulejos de 10 dm^2 se necesitarán para cubrir las mismas paredes?

d. Una familia de 5 personas se hospeda en un hotel durante 20 días. Si otra familia abona lo mismo pero con un integrante menos, ¿cuántos días se hospedó en el hotel?

11) Un comerciante desea repartir $75.000 entre sus 4 empleados de modo que la cantidad que cada uno reciba sea inversamente proporcional al salario que perciben. Hallar la expresión matemática que permita calcular el importe que recibe cada uno como una función de su salario (*ambos expresados en miles de pesos*) y complete la tabla.

Empleado	López	Moreira	Cardozo	García
Salario	0,8	1	1,2	1,5
Importe				

12) El 20% de los alumnos de 1º año resolvieron mal un ejercicio. Si el grupo está formado por 45 alumnos. ¿Cuántos contestaron correctamente? RTA: 36.

13) En un colegio de 1500 alumnos el 40% son chicas y el resto chicos. ¿Qué porcentaje de chicos hay? ¿Cuántas chicas hay? ¿Y chicos? RTA: 60%; 600 chicas, 900 chicos.

14) Un comerciante compra un artículo en 40 euros y la vende en 60. ¿Qué tanto por ciento se ganó? RTA: 50%

15) En una clase de 50 alumnos hay 30 chicas y 20 chicos, de los 50 alumnos un 10% son recursantes y de estos el 20% son chicas. (a) ¿Qué porcentaje representan los chicos dentro de la clase? ¿Y las chicas? (b) ¿Cuántos chicos recursan? (c) Si hay 5 chicas rubias ¿qué porcentaje representan dentro de las chicas? ¿Y dentro de la clase? RTA: a) 40%, 60%; b) 4; c) 16,67%, 10%.

16) Si una cantidad la multiplicas por 1,6, ¿Qué % subió o bajó? ¿Y si la multiplicas por 2,5? RTA: 60%; 150%.

17) Un traje costaba 150 euros antes de las rebajas. En época de rebajas el mismo traje cuesta 120 euros. (a) ¿Qué rebaja nos hicieron (en %)? (b) Si nos rebajasen el 15% ¿cuánto nos costaría? (c) Si los 120 euros son sin IVA y el IVA es del 16% ¿cuánto nos costará el traje? RTA: a) 20%; b) 127,5; c) 139,2.

18) El precio de varios artículos sin IVA es de 25 euros y 17,6 euros. Hallar el precio final sabiendo que con el IVA suben un 16%. RTA: 29 euros; 20,42 euros.

19) Si al cabo de varios años el precio de una mercadería se ha multiplicado por 2,23. ¿Cuál ha sido el aumento expresado en %? RTA: 123%.

20) Un vendedor recibe un 6% de los beneficios de cada venta que realiza. Vende un piso por 80.000 euros. Si ganó un 10%. ¿Qué cantidad corresponde al vendedor? RTA: 480 euros.

21) Un campesino posee 110 hectáreas de monte y decide plantar un 20% con pinos, un 25% de abetos, un 35% de roble y el resto de castaños, teniendo en cuenta que un 5% lo tuvo que dedicar a caminos. ¿Qué superficie plantó de cada tipo de árboles? ¿Qué porcentaje plantó de castaños? RTA: a) 22 Ha de pinos, 27,5 Ha de abetos, 38,5 Ha de roble y 16,5 Ha de castaños, b) El 15%.

22) Un libro que costaba 18 euros aumenta su precio en el 12%. ¿Cuánto cuesta ahora? RTA: 20,16 euros.

23) El precio de una pelota después de un 5% de descuento es de 9 euros. ¿Cuál era el precio inicial? RTA: 9,47 euros.

24) ¿Cuánto dinero ha de cobrar una persona que tiene un 6% de comisión sobre los beneficios de cada venta si realiza una venta de 5 millones de euros con una ganancia del 10%. RTA: 30.000 euros.

25) El 0,8% de la población masculina de una ciudad de 400.000 de habitantes padece de asma. ¿Cuál es el número de enfermos si el 60% de la población son mujeres? RTA: 1.280 personas.

26) El costo de vida ha subido un 3%, un 2,5% y un 2,8% en tres años consecutivos. ¿Cuánto ha subido en total en esos 3 años? RTA: 8,53%.

27) Si me rebajan el 20% y después me suben el 20% de la cantidad rebajada, ¿pago más, menos o igual que antes? Expresa el resultado en %. RTA: Menos, 96%.

28) Calcular la variación porcentual resultante de subir un 10% y después bajar el 20%. Lo mismo, si primero bajamos un 20% y después subimos un 10%. RTA: 88%.

29) Las acciones de una compañía subieron un 2% al mes, durante los 3 primeros meses del año, y bajaron un 5% al mes, durante los seis meses siguientes, por último volvieron a subir un 3% durante los tres últimos meses. Al final del año, ¿en qué % subieron o bajaron? RTA: Bajaron un 14,76%.

30) En un supermercado hacen esta oferta: "Pague 2 y llévese 3". a) ¿cuál es el porcentaje de rebaja? b) ¿Qué porcentaje del precio original se paga? RTA: a) 33,3%; b) 66,7%.

31) En una elección uno de los candidatos obtuvo el 65% de los votos y sacó 1500 votos más que el otro candidato. Entonces el número de votos fue:

A) 4000 32) B) 4500 33) C) 5000 34) D) 5500

35) Al comprar Eliana una blusa en una feria americana, deberían haberle hecho un descuento del 20%, mientras que a Daniela, al comprar un pantalón, deberían haberle hecho un descuento del 10%. El vendedor se equivoca y hace el descuento al revés, por lo que Eliana paga $20 más y Daniela paga $50 menos. ¿Cuál es la suma de dinero que pagaron Eliana y Daniela?

A) $ 700 B) $ 580 C) $ 720 D) $ 600

36) Cuando un número natural es aumentado en un 50% el resultado está entre 10 y 20, ¿Cuáles son los tres posibles valores para ese número?

37) El promedio de las edades del 40% de los asistentes a una reunión es 40 años, el promedio del 25% del resto es de 28 años, ¿cuál debe ser el promedio del resto de las personas, si todos los asistentes en promedio tienen 31 años?

a) 28 años b) 25 años c) 26 años d) 24 años e) 22 años

38) En un tanque hay cierta cantidad de agua. Si de este tanque extraigo el 30% de lo que no extraigo y de lo que extraje devuelvo al tanque el 50% de lo que no devuelvo, resulta que en el tanque hay 990 litros. ¿Cuántos litros de agua había al inicio?

a) 900 b) 1260 c) 1170 d) 1100 e) 1800

39) A una reunión donde asisten hombres y mujeres, el 20% de mujeres es igual al 30% de los hombres. ¿Qué porcentaje son hombres?

a) 50% b) 30% c) 25% d) 40% e) 48%

40) Se disminuye el ancho de un afiche rectangular en 10% y el largo, en 30%. ¿Qué porcentaje del área original representa el área del afiche restante?

a) 45% b) 77% c) 63% d) 70% e) 565

41) Si gastara el 40% del dinero que tengo y ganara el 38% de lo que queda, perdería 5160. ¿Cuánto tengo?

a) 25000 b) 32000 c) 31000 d) 30000 e) 28000

42) En una empresa trabajan 3600 personas. Si el 25% son mujeres, ¿cuántos hombres deben retirarse para que el porcentaje de mujeres aumente en 15%?

a) 1530 b) 900 c) 1800 d) 1350 e) 1250

43) De un total de 50 camisas, un comerciante vende cierta cantidad ganando el 30% y el resto perdiendo el 20%. Si al final no ganó ni perdió, ¿con cuántas camisas obtuvo tal ganancia?

a) 30 b) 15 c) 35 d) 20 e) 25

44) Cuando el agua se solidifica, el volumen del hielo formado es 9% mayor que el del agua. La cantidad de agua que debe congelarse para formar un iceberg de 654 m^3 es:

a) 600 m^3 b) 620 m^3 c) 632 m^3 d) 641 m^3

45) Dos inversiones que totalizan \$ 18000 producen un ingreso anual de \$ 700. Si la primera inversión tiene una tasa de interés de 5,5% y la segunda de 3,0%. ¿Cuál es el monto de cada una de las inversiones?

46) ¿Cuántos gramos de plata pura deben añadirse a 36 g de plata al 60% para obtener una aleación de plata al 76%?

Unidad 3: "Trigonometría plana"

Trigonometría, rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.
Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la física, química y en casi todas las ramas de la ingeniería, como por ejemplo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna, por mencionar algunos.

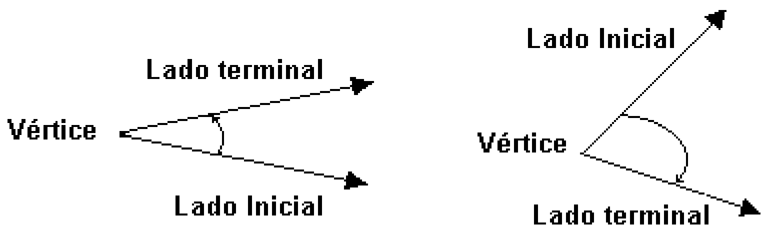
3.1) ÁNGULOS Y SU MEDICIÓN

Ángulos

Definición: Un ángulo en el plano es la figura engendrada por la rotación de una semirrecta alrededor de su origen, desde una posición inicial hasta una posición terminal. La amplitud de la rotación es la medida del ángulo.

Si la rotación se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj diremos que el *ángulo es positivo* y si la rotación es contraria el *ángulo es negativo.*

La rotación de la semirrecta puede completar uno o más giros en sentido positivo o en sentido negativo.

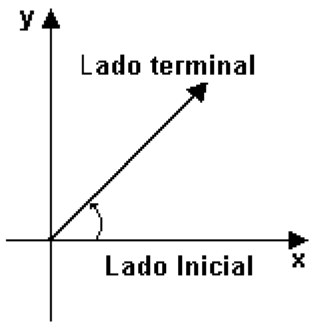


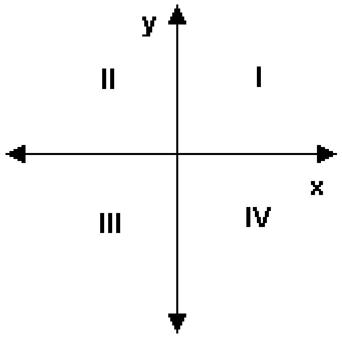
ángulo positivo   ángulo negativo

Ángulos centrados

Dado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de centro en O, convenimos en llamar ***ángulo centrado*** a todo ángulo orientado con vértice en O, cuya semirrecta inicial coincida con el semieje positivo de las abscisas. Decimos que el ángulo de este tipo se encuentra en ***posición normal.***

Este ordenamiento determina el sentido para enumerar los **cuadrantes:**





Los ejes ***x***, **y** dividen al plano en cuatro regiones: primer cuadrante (I) , determinado por los semiejes positivos de coordenadas, segundo cuadrante (II), determinado por semieje de abscisas negativas y el de ordenadas positivas; tercer cuadrante (III) comprendido entre semiejes coordenados negativos y cuarto cuadrante (IV) entre semieje de abscisa positivas y ordenadas negativas.

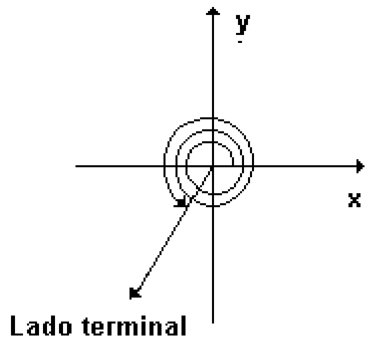
Si el lado terminal está en el primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante diremos que el ángulo es un ángulo del primer, segundo tercer o cuarto cuadrante respectivamente.

Ángulos coterminales

Si se desea dibujar un ángulo de 960° , primero hay que determinar la cantidad de rotaciones completas que hay en dicho ángulo. Para ello dividimos 960° por 360°, nos da 2 de cociente y un resto de 240°, es decir:

$$960° = 2.360° + 240°$$

por consiguiente, este ángulo se forma haciendo dos rotaciones en sentido contrario a las agujas del reloj y a continuación se marca una ángulo de 240° ($\frac{240°}{360°} = \frac{2}{3}$ de otra rotación).



Podemos observar que el lado terminal de un ángulo de 960° coincide con el lado terminal de un ángulo de 240°.

Cuando dos ángulos en posición normal tienen el mismo lado terminal decimos que son ***ángulos coterminales***, como en el caso de los ángulos de 960° y 240°.

Cualquier par de ángulos coterminales tienen medidas en grados que difieren en $k.360°$ con k pertenecientes al conjunto de números enteros.

Por ejemplo los ángulos θ, $\theta + 360°$ y $\theta - 360°$ son coterminales.

Sistemas de Medición de ángulos

Los sistemas más usados para la medición de ángulos son el sexagesimal y el radial.

Sistema sexagesimal

La unidad de medida es el grado sexagesimal (1°) y se obtiene dividiendo el ángulo recto en 90 partes iguales.

Los submúltiplos son el minuto (1’) y el segundo (1”). Cada grado se subdivide en 60 partes iguales llamadas minutos, y cada minuto se divide en 60 partes iguales llamadas segundos. Si se quiere mayor exactitud, se utiliza la parte decimal de los segundos.

$$1' = \frac{1^o}{60} \qquad 1'' = \frac{1'}{60}$$

Observación:

- Si debo dividir un ángulo de 263° por 4, obtengo 67,75°; para expresar los decimales en minutos y segundos debo proceder de la siguiente forma:

$$67{,}75° = 67° + 0{,}75°$$

como 0,75 representa $\frac{75}{100}$ de 1° y 1° = 60 minutos

$$0{,}75° = 0{,}75 .\ 60 \text{ minutos} = 45 \text{ minutos}$$

por lo tanto

67,75° = 67° 45’

- Si por ejemplo tengo 12,23°, procediendo de igual forma

$$0{,}23° = 0{,}23\ .\ 60' = 13{,}8'$$

pero 13,8’ = 13’ + 0,8’   y como 1 min = 60 segundos

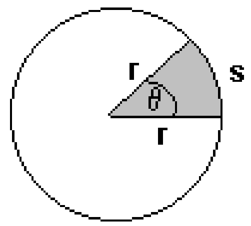
$$0{,}8' = 0{,}8\ .60'' = 48''$$

luego

12,23° = 12° 13’ 48”

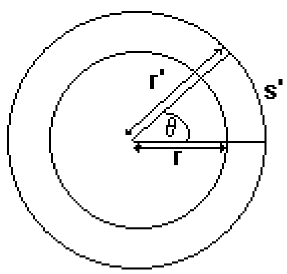
Sistema radial

La medición de ángulos en este sistema se basa en la medida de la longitud de un arco de una circunferencia. Si situamos el vértice del ángulo θ en el centro de una circunferencia de radio *r*, entonces θ se denomina ángulo central. La región del círculo contenida dentro del ángulo central se denomina sector. Denominemos **s** a la longitud del arco subtendido por **θ.** Entonces la medida de **θ** en radianes es el cociente entre la medida de la longitud del arco y el valor del radio de la circunferencia.



$$\boldsymbol{\theta}\ \textbf{(rad)} = \frac{s}{r}$$

Esta definición **no depende del tamaño de la circunferencia**. Para observar esto, tomamos otra circunferencia centrada en el vértice de θ con radio r’ y longitud de arco subtendido s’. Como podemos observar en la figura, los sectores circulares son similares y por ello las razones $\frac{s}{r}$ y $\frac{s'}{r'}$ son iguales. Por consiguiente, cualquiera que sea la circunferencia que utilicemos, vamos a obtener la misma medida para θ.



Dado que la medida de un ángulo en radianes se obtiene por el cociente entre s y r, un ángulo mide:

Un radián (1 rad) cuando el arco de circunferencia que abarca es igual al radio de la misma.

En el caso que tenemos una rotación completa, o sea que el ángulo es de 360° la medida en radianes es:

$$\theta(1giro) = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Por lo tanto,

$$360° = 2\pi \qquad ó \qquad 180° = \pi$$

Observación: ya que la medida en radianes de un ángulo es el cociente de dos longitudes, esta no tiene unidades, decimos que es adimensional. Las medidas en radianes se expresan ocasionalmente con la abreviatura “rad” por razones didácticas aunque estrictamente no deberían llevar ningún símbolo.

Por ejemplo, **61º 28' 42,14" = 1,073**

Conversión de grados a radianes y viceversa

Para la conversión de grados a radianes y viceversa puede utilizarse los siguientes factores de conversión:

$$(1)\ \frac{\pi}{180°} \qquad\qquad (2)\ \frac{180º}{\pi}$$

El factor (1) nos permite convertir grados a radianes y el (2) nos permite convertir de radianes a grados.

Efectuando el cociente indicado por el segundo factor obtenemos que:

1 radián ≈ 57,29578° = 57° 17’ 45”

Una alternativa para convertir las unidades es trabajar con la proporción:

$$\frac{\text{medida en radianes de }\theta}{\text{medida en grados de }\theta} = \frac{\pi}{180°}$$

Ejemplos:

1- Convierta 30° a radianes

$$\frac{\theta(rad)}{30º} = \frac{\pi}{180º}$$

Luego:

$$\theta\ (\text{rad}) = \frac{\pi.30º}{180º} = \frac{\pi}{6}$$

o bien, trabajando con el factor de conversión:

$$\theta\ (\text{rad}) = 30°.\left(\frac{\pi}{180º}\right) = \frac{\pi}{6}$$

2- Convierta $\frac{7}{6}\pi$ a grados

Si usamos el factor de conversión resulta:

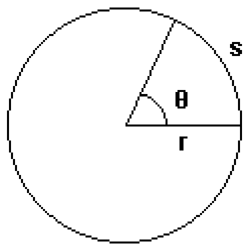
$$\frac{7}{6}\pi \; . \left(\frac{180°}{\pi}\right) = 210°$$

Si trabajamos con la proporción:

$$\frac{\theta(grados)}{\frac{7}{6}\pi} = \frac{180º}{\pi} \Rightarrow \theta \text{ (grados) } = 180º.\frac{7}{6} = 210º$$

Longitud de arco

En muchas aplicaciones es necesario encontrar la longitud s del arco subtendido por el ángulo central θ en una circunferencia de radio r.



A partir de la definición de la medida de un ángulo en radianes

$$\theta \text{ (radianes) } = \frac{s}{r}$$

despejando

$$\mathbf{s = r.\theta(rad)}$$

donde no se debe olvidar que **θ se expresa en radianes**.

Ejemplos:

3- Encontrar la longitud del arco subtendida por un ángulo central de 2 radianes en una circunferencia de radio 4 dm.

$$s = r.\theta(rad) = 4 \text{ dm} . 2 = 8 \text{ dm}$$

4- Encontrar la longitud del arco subtendida por un ángulo central de 210° en una circunferencia de radio 4 dm.

En este caso, para poder emplear la ecuación s = r.θ hay que expresar el ángulo en radianes:

$$210° \frac{\pi}{180º} = \frac{7}{6}\pi$$

Luego:

$$s = r.\theta(rad) = 4 \text{ dm} . \frac{7}{6}\pi \approx 14,67 \text{ dm}$$

3.2) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En esta sección definiremos a las razones trigonométricas **seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cosecante (cosec), secante (sec) y cotangente (ctg),** como las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Más adelante extenderemos las definiciones para ángulos en general.

DEFINICIONES

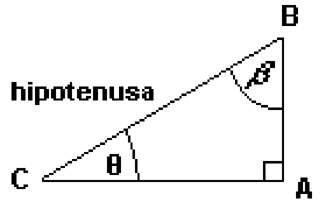
Las seis razones trigonométricas de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo se definen así:

$$sen\ \theta = \frac{op}{hip} \qquad cosec\ \theta = \frac{hip}{op}$$

$$cos\ \theta = \frac{ady}{hip} \qquad sec\ \theta = \frac{hip}{ady}$$

$$tan\ \theta = \frac{op}{ady} \qquad cotan\ \theta = \frac{ady}{hip}$$

Como muestra la figura, si el triángulo BAC es rectángulo en A, el lado BC es la hipotenusa (es decir, el lado opuesto al ángulo recto) y los lados BA y CA son los catetos, los que forman el ángulo recto; y consideramos el ángulo θ**,** CA es el cateto adyacente (ady) y BA es el cateto opuesto (op), por lo tanto las razones trigonométricas resultan:



$$sen\ \theta = \frac{BA}{CB} \quad (1) \qquad cosec\ \theta = \frac{CB}{BA}$$

$$cos\ \theta = \frac{CA}{CB} \quad (2) \qquad sec\ \theta = \frac{CB}{CA}$$

$$tan\ \theta = \frac{BA}{CA} \qquad cotan\ \theta = \frac{CA}{BA}$$

Si ahora consideramos en ángulo β, el cateto opuesto es CA y el cateto adyacente es BA, entonces resulta

$$sen\ \beta = \frac{CA}{CB} \quad (3) \qquad cosec\ \beta = \frac{CB}{CA}$$

$$cos\ \beta = \frac{BA}{CB} \quad (4) \qquad sec\ \beta = \frac{CB}{BA}$$

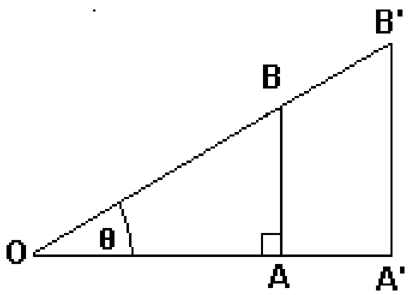
$$tan\ \beta = \frac{CA}{BA} \qquad cotan\ \beta = \frac{BA}{CA}$$

Teniendo en cuenta que θ y β son ángulos complementarios ($\theta + \beta = 90°$) y comparando (1), (2), (3) y (4) observamos que:

$$sen\ \theta = cos\ \beta$$
$$cos\ \theta = sen\ \beta$$

Además, nos podríamos preguntar qué pasa si construyo con el mismo ángulo θ otros triángulos rectángulos, las razones trigonométricas que se obtendrían son o no, las mismas.

Esto lo vemos a continuación. Como lo muestra la figura, dos triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo son semejantes, esto significa que sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales, por lo que las razones de los lados correspondientes son iguales, en este caso



$$\frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$

En el triángulo más pequeño tenemos que

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{AB}{OB}$$

por otra parte en el triángulo más grande tenemos que

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{A'B'}{OB'}$$

Pero como el triángulo AOB es semejante al triángulo A'OB', tenemos que:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'}$$

Así encontramos el mismo valor para el sen θ sin importar cuál sea el triángulo que utilicemos para calcularlo.

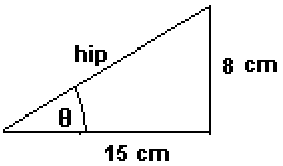
Un argumento similar se puede usar para las otras razones trigonométricas.

Por lo tanto los valores de ***las razones trigonométricas dependen únicamente del valor de su ángulo agudo y no del tamaño del triángulo rectángulo (las medidas de sus lados)***, dado que están definidos como una razón entre sus lados.

De esta forma quedan definidas las razones trigonométricas para ángulos agudos ($0° < \theta < 90°$). Más adelante extenderemos esta definición para incluir los ángulos distintos de los agudos.

Ejemplo:

4- Encuentre el valor de las seis razones trigonométricas del ángulo θ que nos muestra la figura



Solución: Para calcular las razones trigonométricas necesito conocer los valores del lado opuesto y el lado adyacente al ángulo θ y el correspondiente a la hipotenusa del triángulo.

Según la figura podemos ver que para el ángulo θ:

el lado op = 8 cm

el lado ady = 15 cm

el valor de la hipotenusa lo hallaremos usando el teorema de Pitágoras:

$$(\text{hip})^2 = (\text{op})^2 + (\text{ady})^2$$

reemplazando

$$(\text{hip})^2 = (8 \text{ cm})^2 + (15 \text{ cm})^2$$

$$\text{hip} = \sqrt{289 cm^2} = 17 \text{ cm}$$

Entonces los valores de las seis razones trigonométricas son

$$sen\ \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{8\text{cm}}{17 \text{ cm}} = \frac{8}{17} \qquad cosec\ \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{17\text{cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{17}{8}$$

$$cos\ \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{15\text{cm}}{17\text{ cm}} = \frac{15}{17} \qquad sec\ \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{17\text{cm}}{15\text{ cm}} = \frac{17}{15}$$

$$tan\ \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{8\text{cm}}{15\text{ cm}} = \frac{8}{15} \qquad cotan\ \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{15\text{cm}}{8\text{ cm}} = \frac{15}{8}$$

Relaciones entre Seno, Coseno y Tangente del mismo ángulo
Hay muchas relaciones importantes entre las razones trigonométricas. Las básicas se denominan **identidades fundamentales,** y vale la pena conocerlas…

- Identidades del cociente

$$\tan\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta} \ \ (1) \qquad \text{cotan}\ \theta = \frac{\cos\theta}{sen\theta} \ \ (2)$$

- Identidades reciprocas

$$cosec\ \theta = \frac{1}{sen\theta} \ \ (3) \qquad sec\ \theta = \frac{1}{\cos\theta} \ \ (4) \qquad cotan\ \theta = \frac{1}{\tan\theta} \ \ (5)$$

- Identidad Pitagórica

$$\mathbf{\cos^2\theta + sen^2\theta = 1} \quad (6)$$

La primera la podemos verificar de la siguiente manera

$$\frac{sen\theta}{\cos\theta} = \frac{op/hip}{ady/hip} = \frac{op}{ady} = \tan\theta$$

Las otras identidades de la (2) a la (5) las podemos verificar de la misma manera.

Para demostrar la (6):

$$\frac{ady^2}{hip^2} + \frac{op^2}{hip^2} = \frac{ady^2 + op^2}{hip^2}$$

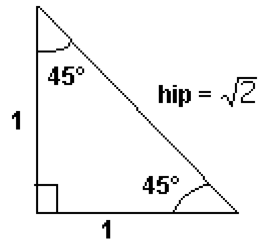
pero por el teorema de Pitágoras sabemos que el valor del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, por lo tanto:

$$\frac{ady^2}{hip^2} + \frac{op^2}{hip^2} = \frac{ady^2 + op^2}{hip^2} = \frac{hip^2}{hip^2} = 1$$

A partir de la relación (6) podemos deducir otras muy útiles. Encuentra cuáles son.

Seno y coseno de ángulos especiales
Con frecuencia en trigonometría se usan los ángulos que miden 30° (π /6 radianes), 45° (π / 4 radianes) y 60° (π /3). Podemos hallar los valores de las razones trigonométricas de estos ángulos especiales usando algunos resultados de la trigonometría plana.

Para encontrar los valores de las razones trigonométricas de un ángulo de 45° (π/4 radianes**)** consideremos un triángulo rectángulo isósceles con dos lados iguales de longitud 1, como lo muestra la figura:



De la geometría sabemos que los ángulos agudos de este triángulo son iguales; por eso cada uno de los ángulos agudos mide 45°. Por el teorema de Pitágoras podemos encontrar la longitud de la hipotenusa:

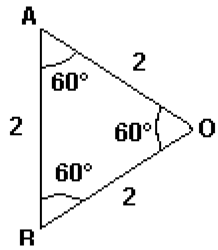
$$(\text{hip})^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2$$

$$\text{hip} = \sqrt{2}$$

Entonces, tenemos que:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{tg } 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Para encontrar los valores de las razones trigonométricas de un ángulo de 30° y 60°(π/6 y π/3 radianes) consideremos un triángulo equilátero AOB con lados de longitud 2, como muestra la figura.



Por geometría sabemos que los tres ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.

Si trazamos la bisectriz del ángulo O, entonces CO es la bisectriz perpendicular de AB, y por lo tanto el ángulo O de 60° queda dividido en dos ángulos iguales de 30° y en C se forman ángulos rectos.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al ángulo recto ACO, obtenemos

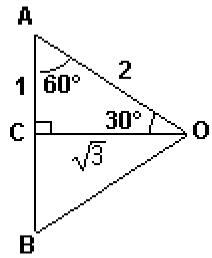
$$CO^2 + 1^2 = 2^2$$

o sea:

$$CO^2 = 3$$

de manera que:

$$CO = \sqrt{3}$$



Así, del triángulo CAO podemos obtener los siguientes valores:

- Para el ángulo de **30°**

$$\text{sen } 30° = \frac{op}{hip} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{ady}{hip} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{op}{ady} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Para el ángulo de **60°**

$$\text{sen } 60° = \frac{op}{hip} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{ady}{hip} = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \frac{op}{ady} = \sqrt{3}$$

La siguiente tabla resume los valores del seno, coseno y tangente para los ángulos especiales 0°, 30°, 45°, 60° y 90° (0, π/6, π/4 , π/3 y π/2, medidos en radianes). Estos son utilizados con frecuencia por lo cual es útil memorizarlos y expresados de esta manera son valores exactos (notación formal):

Ángulo (grados)	*Ángulo (radianes)*	*seno*	*coseno*	*tangente*
0°	0	0	1	0
30°	π/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	π/2	1	0	no tiene

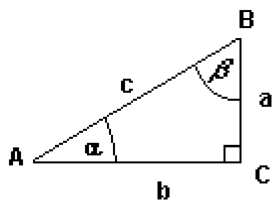
3.3) APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA A TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolución de triángulos rectángulos

Las aplicaciones de la trigonometría en campos como la topografía y la navegación entre otros requiere **resolver triángulos rectángulos.** La expresión “ Resolver un triángulo” significa encontrar la longitud de cada lado y la medida de cada ángulo. En esta sección veremos que podemos resolver cualquier triángulo rectángulo si se nos da:

i) o bien las longitudes de dos lados, o
ii) la longitud de un lado y la medida de un ángulo

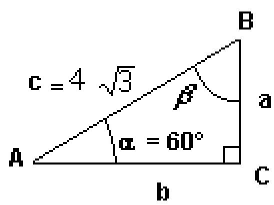
Como lo veremos en los ejemplos más adelante, dibujar y demarcar el triángulo es parte fundamental del proceso de resolución. Nosotros dibujaremos y demarcaremos el triángulo como muestra la figura. Los vértices se nombran como **A**, **B** y **C,** los ángulos agudos como α y β**,** y las longitudes de los lados con **a, b** y **c** (llevan la letra minúscula correspondiente al vértice opuesto).



Ejemplo

5- Resuelva el triángulo rectángulo con hipotenusa de $4\sqrt{3}$ de longitud y un ángulo de 60°.

Solución: Primero dibujamos el triángulo incluyendo en él los datos como muestra la figura. Queremos encontrar **a, b y β.** Como α y β son complementarios



$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 60° = 30°$$

Como conocemos el valor de la *hipotenusa*, para encontrar el lado **a**, que es el *opuesto* al ángulo de 60°, seleccionamos la definición de *seno*

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$$

luego

$$\text{sen } 60° = \frac{a}{4\sqrt{3}}$$

de donde

$$a = 4\sqrt{3}\,.\text{sen } 60° = 6$$

Para encontrar, el lado *adyacente* al ángulo de 60°, usamos la definición de *coseno:*

$$\cos \alpha = \frac{ady}{hip}$$

luego

$$\cos 60° = \frac{b}{4\sqrt{3}}$$

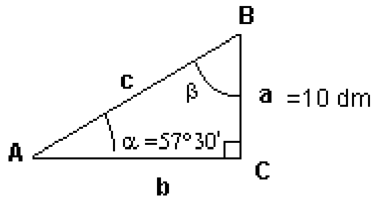
de donde

$$b = 4\sqrt{3} . \cos 60° = 2\sqrt{3}$$

En este caso hemos trabajado con los datos iniciales del problema, pero como alternativa una vez ido el valor de a para hallar podríamos haber usado o bien el teorema de Pitágoras o la definición de tangente. En general, puede haber muchas maneras de resolver el triángulo

6- Resolver el triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 57° 30' y cuyo lado opuesto mide 10 dm.

Solución: Primero dibujamos el triángulo incluyendo en él los datos como muestra la figura. A partir del dibujo podemos ver que debemos encontrar **β, b y c.** Como **α y β** son ángulos complementarios,



$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 57° 30' = 32° 30'$$

Conocemos la longitud del lado *opuesto* a α , para hallar la longitud del lado *adyacente* usamos la definición de *tangente*

$$\tan \alpha = \frac{op}{ady}$$

reemplazando

$$\tan (57°30') = \frac{10dm}{b}$$

despejando

$$b = \frac{10dm}{\tan 57°30'} \approx 6{,}37dm$$

Para hallar la *hipotenusa* **c,** usamos la definición del *seno* ya que tenemos como dato el cateto *opuesto* al ángulo α

$$\text{sen } \alpha = \frac{op}{hip}$$

reemplazando

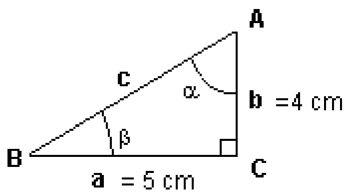
$$\text{sen}(57° 30') = \frac{10 \text{ dm}}{c}$$

despejando

$$c = \frac{10\text{dm}}{\text{sen}57°30'} \approx 11{,}86$$

7- Resolver el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 y 5 cm de longitud.

Solución: Dibujamos el triángulo incluyendo en él los datos como muestra la figura. Vemos que debemos encontrar **c, α** y **β.**



Para hallar el valor de la hipotenusa podemos usar el teorema de Pitágoras

$$(hip)^2 = (cat)^2 + (cat)^2$$

reemplazando

$$(hip)^2 = (4\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2$$

$$hip = \sqrt{41 cm^2} \approx 6{,}40 cm$$

Para encontrar β, como tenemos el cateto *opuesto* y el a*dyacente* usamos la definición de *tangente*

$$\tan\beta = \frac{op}{ady}$$

$$\tan\beta = \frac{4cm}{5cm} = 0{,}8$$

Conocemos el valor de la tangente del ángulo, pero debemos averiguar cuál es la medida del ángulo, para ello debemos proceder de la siguiente manera

$$\beta = \text{atan } 0{,}8$$

En la calculadora oprimimos $\boxed{\text{INV}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$ y luego $\boxed{\text{tan}}$, el resultado es

$$\beta \cong 38{,}66° \cong 38°\ 39'\ 35''$$

Para encontrar el valor de α hacemos

$$\alpha = 90° - 38°\ 39'\ 35'' = 53°\ 20'\ 25''$$

O bien volvemos a usar la definición de *tangente*

$$\tan\ \alpha = \frac{5cm}{4cm} = 1{,}25$$

despejamos

$$\alpha = \text{atan } 1{,}25 \approx 53°\ 20'\ 25''$$

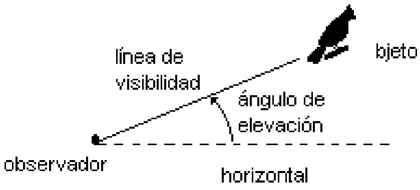
Observación: En muchas oportunidades podemos conocer o averiguar el valor de las razones trigonométricas de algún ángulo sin saber el valor del mismo. Por ejemplo podemos conocer el valor del sen θ y deseamos encontrar el valor de θ, para ello usamos las funciones inversas de las razones trigonométricas que se denominan arcoseno, arcocoseno y arcotangente respectivamente. Para resolverlas utilizamos la calculadora como lo indicado en el ejemplo anterior.

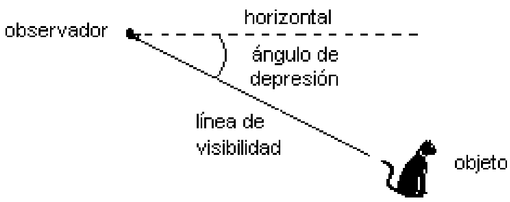
Pero debemos tener en cuenta a qué cuadrante pertenece el ángulo que buscamos, pues entre 0° y 360° (o entre 0 y 2 π radianes) existen 2 ángulos con el mismo valor para el seno, dos para el mismo valor de coseno, etc.

Ángulos de elevación y depresión

El ángulo entre la línea de visibilidad de un observador y un objeto, y la línea horizontal recibe un nombre especial. Como lo ilustra la figura, si la línea de visibilidad y el objeto está por encima de la horizontal, el ángulo se denomina **ángulo de elevación**, mientras que si la línea de visibilidad y el objeto están por debajo de ha horizontal, el ángulo se denomina **ángulo de depresión.**

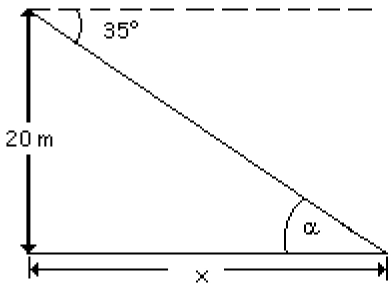
Observemos que ambos ángulos se forman con la *horizontal* y depende dónde está el observador





Ejemplo
8- Un salvavidas se encuentra en una torre a 20 metros del nivel del mar. Descubre a una persona que necesita su ayuda y que la observa con un ángulo de depresión de 35°.¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra esa persona?

Solución: Hacemos un esquema de la situación:



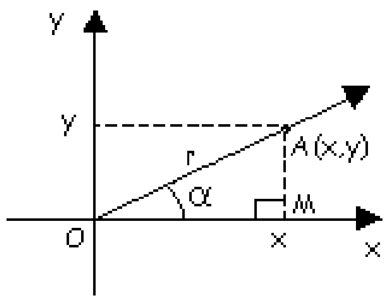
El ángulo α también mide 35° por ser alternos internos entre paralelas. Vemos que queda determinado un triángulo rectángulo donde conocemos el valor de un cateto y el otro es nuestra incógnita (x), por lo tanto usamos la definición de tangente

$$\tan\alpha = \frac{op}{hip} = \frac{20m}{x}$$

despejamos
$$x = \frac{20m}{\tan 35°} = 28{,}56m$$

3.4) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA

¿Cómo definir las razones trigonométricas de ángulos no agudos sobre los que no se puede trazar un triángulo rectángulo? Hasta ahora hemos definido las razones trigonométricas sólo para ángulos agudos. Sin embargo, muchas aplicaciones de la trigonometría incluyen ángulos que no son agudos. Como consecuencia, es necesario extender la definición de las razones trigonométricas para ángulos generales. Naturalmente queremos extender la definición de acuerdo a las que ya conocemos para ángulos agudos.

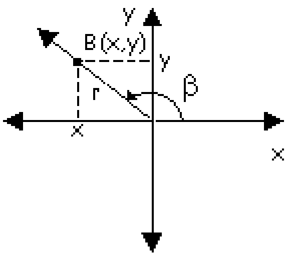


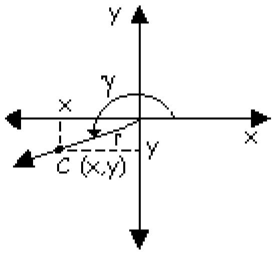
Tomemos un ángulo agudo α en posición normal y escojamos un punto A= (x,y) en el lado terminal de α como muestra la figura .
Si tomamos r = d (O, A) = $\sqrt{x^2 + y^2}$, entonces para el triángulo OMA y el ángulo α es
y = op
x = ady
r = hipotenusa

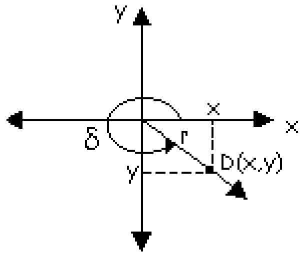
entonces tenemos que:

$$\textbf{sen } \alpha = \frac{y}{r} \qquad \textbf{cos } \alpha = \frac{x}{r} \qquad \textbf{tan } \alpha = \frac{y}{x}$$

Estas expresiones nos dan un modelo sobre el cual basamos nuestra definición extendida para cualquier ángulo θ, en posición normal (ángulo medido a partir del eje positivo de x)







Las coordenadas de los puntos A, B, C y D sirven para calcular los valores de seno y coseno de los ángulos α, β, γ y δ.

DEFINICIONES

Sea θ un ángulo en posición *normal***,** y sea P (x,y) cualquier punto distinto de (0,0) en el lado terminal de θ. Si r es la distancia entre (0,0) y (x, y), entonces las seis razones trigonométricas de θ se definen como:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} \qquad\qquad \text{cosec } \theta = \frac{r}{y} \quad \text{con } y \neq 0$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad\qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad \text{con } x \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{con } x \neq 0 \qquad\qquad \text{cotan } \theta = \frac{x}{y} \quad \text{con } y \neq 0$$

Se puede demostrar, utilizando triángulos semejantes, que los valores de las seis razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo θ (la justificación es como la que se hizo para los ángulos agudos, anímate y plantea alguna de ella).

Las razones trigonométricas serían indefinidas si los denominadores valieran cero. Como P(x,y) ≠ 0 entonces r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ nunca es cero. Por lo tanto el seno y el coseno están definidos para todos los ángulos, en cambio la tangente y la secante ***no están definidas si el ángulo tiene un lado terminal sobre el eje y***, pues en ese caso x = 0. De igual manera la cotangente y la cosecante no se definen para ángulos con lados terminales en el eje x porque y = 0.

Ahora bien, analicemos que valores puede tomar el seno y el coseno de un ángulo. Como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

tenemos que

$$|x| \leq r$$
$$|y| \leq r$$

entonces

$$|\text{sen } \theta| \leq 1 \qquad y \qquad |\cos\theta| \leq 1$$

Ejemplo

9- Encuentre los valores exactos de las seis razones trigonométricas del ángulo θ que está en posición normal y el lado terminal del ángulo contiene el punto P(–3, 1).

Solución: Si hacen el dibujo verán que el lado terminal está en el segundo cuadrante. Además tenemos x = – 3 e y = 1, entonces r = $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \text{cosec } \theta = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \qquad \sec \theta = \frac{\sqrt{10}}{-3} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

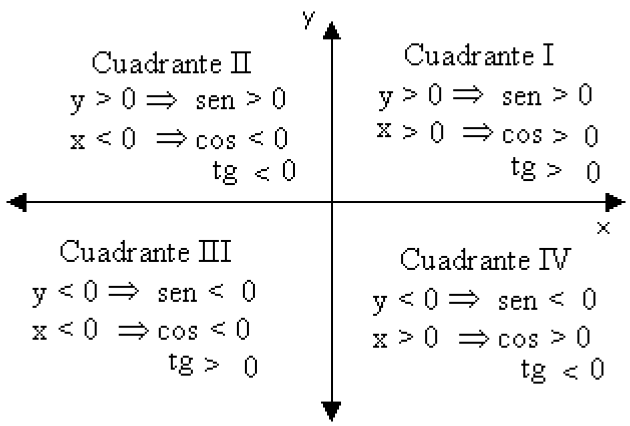
$$\tan \theta = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \qquad \text{cotg } \theta = \frac{-3}{1} = -3$$

Signos algebraicos de las razones trigonométricas

Dependiendo del cuadrante en que está el lado terminal del ángulo, una o ambas coordenadas de P (x, y) pueden ser negativas pero r = $\sqrt{x^2+y^2}$ siempre *es positivo*. Por lo tanto dependiendo del cuadrante que está el lado terminal del ángulo serán los signos de las coordenadas del punto P y por ende el signo de cada una de las razones trigonométricas.

Por ejemplo sen θ = $\frac{y}{r}$ es positivo si el lado terminal está en el cuadrante I ó II y negativo si está en el cuadrante III ó IV. Para el cos θ = $\frac{x}{r}$ es positivo si el lado terminal del ángulo está en el cuadrante I ó IV y negativo si pertenece al cuadrante II ó III.

Analiza el signo de tan θ para ángulos cuyo lado terminal esté en el cuadrante I, II, III y IV.



Ejemplo:

10- ¿En qué cuadrante se encuentra un ángulo si sen θ > 0 y tan θ < 0?

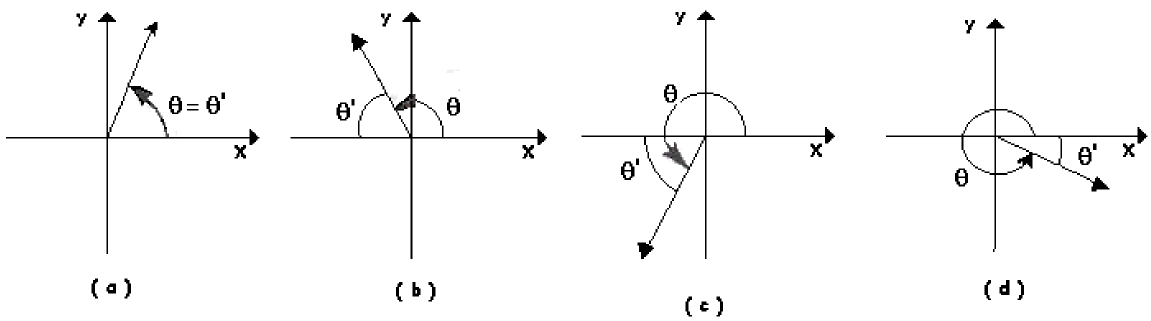
Solución: Como el seno es positivo en los cuadrantes I y II y la tangente es negativa en los cuadrantes II y IV, el ángulo pertenece al cuadrante II.

Ángulos de referencia

> **DEFINICIÓN:**
> Tomemos θ como un ángulo en posición normal de manera que su lado terminal no esté en el eje coordenado. El **ángulo de referencia θ' para θ** se define como el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

Nosotros encontramos los valores de seno, coseno y tangente para los ángulos especiales de 30°, 45° y 60° (o π /6, π /4 y π /3, medidos en radianes). Estos valores se pueden utilizar para determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos, no agudos, mediante el **ángulo de referencia.**

El ángulo de referencia se define para cualquier ángulo dado. La siguiente figura ilustra esta definición para ángulos con lados terminales en cada uno de los cuatro cuadrantes.



Ejemplo:
11- Encuentre el ángulo de referencia para cada uno de los ángulos dados:
a) θ = 40° b) θ = 2π/3 c) θ = 210° d) θ = -9π/4
***Solución**:* Hagan la figura correspondiente a cada ángulo y vean que

a) θ' = 40° coincide con el ángulo dado. Esto va a ocurrir con todos los ángulos del primer cuadrante.
b) θ' = π – θ = π/3.
c) θ' = θ – 180° = 30°.
d) Como θ = –9π/4 es coterminal con –9π/4 + 2π = –π/4
Entonces θ' = π/4

La utilidad de los ángulos de referencia al evaluar las funciones trigonométricas es el resultado de la siguiente propiedad:

> ***El valor absoluto de una razón trigonométrica de un ángulo es igual al valor de dicha razón para el ángulo de referencia***

Ejemplo:
12- Encuentre los valores exactos de sen θ, cos θ y tg θ para cada uno de los siguientes ángulos:
a) θ = $\frac{2\pi}{3}$ b) θ = 210° c) θ = $-\frac{9\pi}{4}$

Solución: a) Primero buscamos el ángulo de referencia que para θ = $\frac{2\pi}{3}$ que es θ' = π/3 de la tabla de hecha con los ángulos especiales, sabemos que:

$$\text{sen}\,(\pi/3) = \sqrt{3}/2$$

$$\cos\,(\pi/3) = 1/2$$

y

$$\tan\,(\pi/3) = \sqrt{3}$$

Sabemos que los valores absolutos del seno, coseno y tangente de θ y θ’ coinciden pero el signo de cada valor corresponde a la ubicación del ángulo.

Como θ = $\frac{2\pi}{3}$ es un ángulo del cuadrante II, donde seno es positivo, pero el coseno y la tangente son negativos, resulta:

sen $\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cos $\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ tg $\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

b) θ = 210°, en este caso el ángulo de referencia θ’ = 30. Usando la propiedad de los ángulos de referencia, el hecho de que el lado terminal de 210° está en el cuadrante III y los valores que figura en la tabla de la de ángulos especiales, obtenemos:

sen 210° = -sen30° = $-\frac{1}{2}$

cos 210° = -cos30° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

tan 210° = tan 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) θ = $-\frac{9\pi}{4}$ en este caso el ángulo de referencia θ’ = π/4. Usando la propiedad de los ángulos de referencia, el hecho de que de que el ángulo terminal de 210° está en el cuadrante IV y los valores que figura en la tabla de ángulos especiales obtenemos:

$\text{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

13- Encuentre todos los ángulos que se encuentren entre 0° ≤ θ ≤ 360° de manera que sen θ = $\frac{1}{2}$

Solución: Por la tabla de los ángulos especiales sabemos que una solución es θ = 30°. Como seno positivo también tenemos para ángulos del II cuadrante y 30° es el ángulo de referencia de θ = 150°, que es una segunda solución. Como la función seno es negativa en el III y IV cuadrante, no hay soluciones adicionales que satisfagan lo pedido.

Relaciones entre las razones trigonométricas entre ángulos
Las relaciones siguientes se utilizan para la reducción al primer cuadrante…

- **Ángulos complementarios**

sen θ = cos ($\frac{\pi}{2}$ - θ) cos θ = sen ($\frac{\pi}{2}$ - θ) tan θ = tan ($\frac{\pi}{2}$ - θ)

- **Ángulos suplementarios**

sen θ = sen (π – θ) cos θ = –cos (π – θ) tan θ = –tan (π – θ)

- **Ángulos que difieren en π**

sen θ = – sen (π + θ) cos θ = –cos (π + θ) tan θ = tan (π – θ)

- **Ángulos que suman 2 π**

sen θ = –sen (2π – θ) cos θ = cos (2π – θ) tan θ = –tan (2π – θ)

- **Ángulos opuestos**

senθ = –sen (–θ) cosθ = cos (–θ) tan θ = –tan (–θ)

3.5) RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

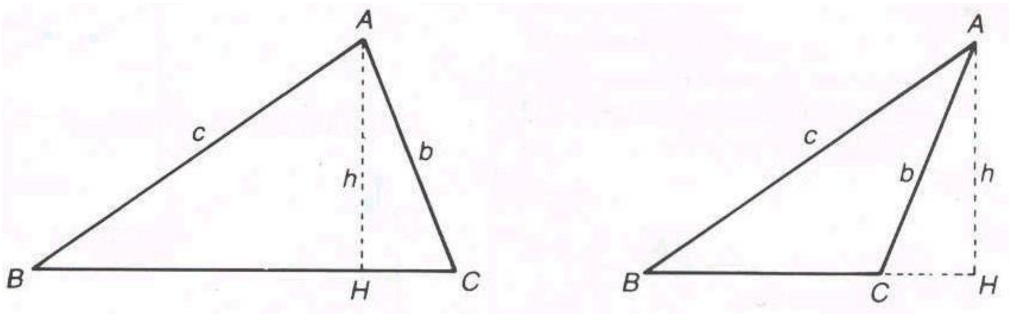
Acá veremos cómo podemos utilizar la trigonometría para resolver triángulos no rectángulos. Para ello necesitamos relacionar elementos conocidos con los desconocidos mediante fórmulas que los relacione. Ello lo lograremos mediante el *teorema del seno y el teorema del coseno***.**

Teorema del seno

¿Sabías que en cada triángulo, el ángulo mayor tiene enfrente al lado mayo y el ángulo menor tiene enfrente el lado menor?
Una expresión cuantitativa de este hecho es el teorema de seno que nos expresa que:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Ahora vamos a demostrarlo



Como la altura de un triángulo es la perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto, en el triángulo ABC trazamos la altura h desde el vértice A. Quedan así determinados los triángulos BHA y CHA, rectángulos en H. Por lo tanto tenemos:

$$senB = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c.senB$$

$$senC = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b.senC$$

luego

$$c.senB = b.senC$$

de donde

$$\frac{c}{senC} = \frac{b}{senB}$$

Si trazamos la altura desde el vértice C se obtendría

$$\frac{b}{senB} = \frac{a}{senA}$$

Queda así demostrada la relación

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

También puede expresarse el teorema del seno como

$$\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}=\frac{senC}{c}$$

Observación: El teorema del seno sirve para relacionar dos lados de un triángulo con los ángulos opuestos. Por lo tanto se podrá resolver cualquier triángulo del que conozcamos:

- *dos ángulos y un lado*
- *dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos*

Ejemplo:
14- Dos de los ángulos de un triángulo miden 20° y 130°, el lado opuesto al ángulo menor mide 6 dm. Encontrar el valor de los lados restante y del otro ángulo
Solución: Denominemos a los ángulos

$$B = 20° \quad A = 130º \quad y \quad b = 6 \text{ dm}$$

luego

$$C = 180° -20° - 130° = 30°$$

Si aplicamos el teorema del seno, vemos que

$$\frac{a}{sen130°}=\frac{6dm}{sen20°}=\frac{c}{sen30°}$$

Resolviendo para a desde

$$\frac{a}{sen130°}=\frac{6dm}{sen20°}$$

despejando

$$a=\frac{6dm}{sen20°}\cdot sen130° \approx 13{,}44 \text{ dm}$$

Resolviendo para c usamos

$$\frac{6dm}{sen20°}=\frac{c}{sen30°}$$

despejando

$$c=\frac{6dm}{sen20°}\cdot sen30°$$

15- Encuentre los restantes elementos de un triángulo que tiene un ángulo B = 50° y dos lados b = 5 cm y c = 6 cm
Solución: a partir del teorema del seno tenemos que

$$\frac{sen50°}{5cm}=\frac{senC}{6cm}$$

de donde

$$sen\ C = \frac{6cm\cdot sen50°}{5cm}\approx 0{,}9193$$

$$C = arcosen\ 0{,}9193 = 66{,}82°$$

Dado que entre 0 y 180° hay dos ángulos cuyo seno es 0,9193, uno del primer cuadrante y otro del segundo cuadrante, entonces hay dos posibles triángulos que satisfacen las condiciones dadas.

Usando 66,82° como ángulo de referencia, encontramos el ángulo del segundo cuadrante cuyo seno es 0,9193

$$180° - 66{,}82° = 113{,}18°$$

- Si el valor de C es 66,82° entonces

$$A = 180° - 66,82° - 50° = 63,18°$$

Para encontrar el lado a usamos

$$\frac{sen 63{,}18°}{a} = \frac{sen 50°}{5cm}$$

de donde

$$a = \frac{5cm.sen 63{,}18°}{sen 50°} \approx 5{,}83 \text{ cm}$$

- Si el valor de C es 113,18° entonces

$$A = 180° - 113,18° - 50° = 16,82°$$

Para encontrar el lado a usamos

$$\frac{sen 16{,}82°}{a} = \frac{sen 50°}{5cm}$$

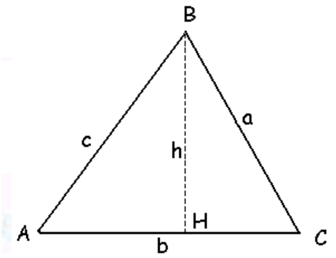
de donde

$$a = \frac{5cm.sen 16{,}82°}{sen 50°} \approx 1{,}89 \text{ cm}$$

Teorema del coseno
Este teorema nos expresa que el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo que determinan. Es decir si consideramos el lado a resulta

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A}$$

Ahora vamos a demostrarlo



$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cos A$$

$$HC = b - AH = b - \cos A$$

En el triángulo ABC trazamos la altura h desde el vértice B. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos AHB y BHC, donde a y c son las respectivas hipotenusas, resulta

$$a^2 = h^2 + HC^2 = h^2 + (b - \cos A)^2 = h^2 + b^2 - 2\, b\, c \cos A + c^2 \cos^2 A$$

$$c^2 = h^2 + AH^2 = h^2 + (c \cos A)^2 = h^2 + c^2 \cos^2 A$$

restando

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2\, b\, c \cos A$$

despejando

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$$

Análogamente se obtienen las siguientes relaciones

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B}$$

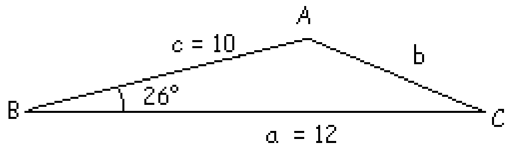
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos C$$

Observación: El teorema del coseno sirve para relacionar tres lados de un triángulo con uno de sus ángulos. Por lo tanto se podrá resolver cualquier triángulo del que conozcamos:

- *los tres lados*
- *dos lados y un ángulo*

Ejemplo:

15- Determine el lado restante y los otros dos ángulos del triángulo que se muestra en la figura.



Solución: como conocemos dos lados y el ángulo comprendido, aplicando el teorema del coseno para averiguar b resulta

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$$

reemplazando, tenemos

$$b^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \,.\, 10 \,.\, 12 \,.\, \cos 26°$$

$$b^2 \approx 28{,}2894$$

es decir

$$b \approx 5{,}32$$

Ahora aplicamos el teorema del coseno para averiguar el ángulo C

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos C$$

$$10^2 = 12^2 + 5{,}32^2 - 2 \,.\, 12 \,.\, 5{,}32 \cos C$$

despejando y resolviendo

$$\cos C = 0{,}5663$$

$$C = \text{acos } 0{,}5663$$

$$C = 55°\ 30'\ 26''$$

Para hallar el ángulo A

$$A = 180° - 26° - 55°\ 30'\ 26'' = 98°\ 29'\ 34''$$

Analice la posibilidad de resolver este triángulo usando el teorema del seno.

Serie de problemas Nº 3

1) Convierta los siguientes ángulos del sistema radial al sexagesimal:
   a. $3\ \pi/2$ b. $5\ \pi$ c. $3\ \pi\ /4$ d. 1 e. 3 f. $\pi\ /3$ g.$\pi\ /6$

2) Exprese en el sistema radial y sexagesimal:
   a. El ángulo exterior de un triángulo regular
   b. El ángulo exterior al ángulo B del paralelogramo ABCD, si el ángulo A = 55°
   c. Los ángulos interiores de un triángulo ABC, sabiendo que el ángulo B es el doble de A y el ángulo C es la semisuma de los otros dos

3) Para los siguientes ángulos, encuentre el ángulo entre 0 y 2π radianes que es coterminal con el ángulo dado
   a) $-3\pi/4$ **b)** $5\pi/2$ **c)** $-11\pi/2$ **d)** $11\pi/2$

4) Para los siguientes ángulos encuentre en cada caso el ángulo complementario y suplementario, si es necesario diga por qué el ángulo no puede ser encontrado.
   a) 41°45’ **b)** 93°58’ **c)** 104,5° **d)** 59,06°

5) Encuentre las medidas en grados y radianes del ángulo obtuso formado por las agujas de un reloj cuando marca:
   a) las 7:00 **b)** las 4:00 **c)** las 5:30

6) La Tierra da una rotación completa cada 24 horas ¿Cuánto se demora en rotar un ángulo de
   a) 225°? b) $\pi/3$ radianes?

7) Encuentre la longitud de arco subtendido por un ángulo central de 60° en una circunferencia de radio 3 cm y otra de radio 5 m.

8) Encuentre la longitud de arco subtendido por un ángulo central de 2 radianes en una circunferencia de radio 2 dm y otra de radio 4 m.

9) Encuentre la medida en grados y en radianes de un ángulo central en una circunferencia de radio 4, si el ángulo subtiende un arco cuya longitud es 6,75 dm.

10) Un velero navega alrededor de una boya fija describiendo una circunferencia. El arco recorrido por el velero desde su posición inicial hasta la posición final es de 1700 m y abarca un ángulo central de 120°. Calcule la distancia desde el velero hasta la boya.

11) Una rueda gira 700 vueltas por hora. En una hora:
    a. ¿Cuántos radianes gira la rueda?
    b. ¿Cuántos grados gira la rueda?
    Considere un punto P en el borde de una rueda que tiene un diámetro de 30 pulgadas. Si la rueda da 80 revoluciones, ¿Cuál es la distancia que recorre P?

12) Un péndulo de 4 pies se balancea de un lado a otro. En su movimiento la punta del péndulo recorre un arco de 2 pies de longitud en cada balanceo. ¿Cuál es el número de grados que recorre el péndulo en su balanceo?

13) Si θ es un ángulo agudo ¿Es posible que cos θ = 5/3? ¿Es posible que sen θ = 3/2? Explique la respuesta.

14) Si θ es un ángulo que está en posición normal y su lado terminal contiene el punto dado en cada uno de los siguientes casos, halle el valor seno, coseno y tangente de θ (sin usar la calculadora):

a) (4 ; 9) **b)** (6 ; -8) **c)** (0 ; 5)

d) (-3 ; 2) **e)** (-1 ; $\sqrt{2}$) **f)** (-4 ; 0)

15) Halle el valor de las restantes razones trigonométricas para los siguientes casos (***sin usar la calculadora***):

a. cos θ = ¼ y θ está en el cuadrante II

b. cos θ = -1/5 y θ está en el cuadrante III

c. sen θ = 0,6 y 0 < θ < π/2

d. sen θ = $\frac{5}{13}$ y π /2 < θ < π

e. sen θ = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y π < θ < 3/2 π

f. cos θ = 4/5 y 0 < θ < π/2

g. cos θ = 15/17 y 3/2 π < θ < 2π

h. tg θ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$θ y π < θ < 3/2 π

i. tg θ = -3 y π/2 < θ < π

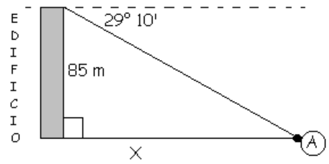
16) Encontrar el ángulo de referencia (reducir al primer cuadrante) y hallar el valor de las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) α = $\frac{5}{6}\pi$ **b)** α = $\frac{9}{4}\pi$ **c)** α = $\frac{8}{3}\pi$ **d)** α = $-\frac{7}{4}\pi$

17) Dado el triángulo rectángulo BAC (rectángulo en a) del que se sabe que a = 25, b = 16, determine el lado c y los ángulos B y C.

18) En el triángulo MNP (rectángulo en N) el lado MP es cinco veces mayor que el MN. Calcule el ángulo M.

19) Desde la terraza de un edificio de 85 m de altura se ve un automóvil con un ángulo de depresión de 29°10’. Calcule la distancia del automóvil a la base del edificio.



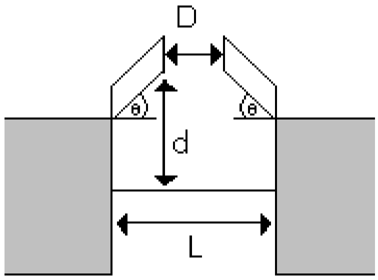
20) El hilo de un barrilete se encuentra tenso y forma un ángulo de 54°20´ con la horizontal. Encuentre la altura del barrilete con respecto al suelo si el hilo mide 85 m y el operador sostiene al mismo a 1.5 m del suelo.

21) Un ingeniero desea construir una rampa de 50 m de largo que se levante 5 m del suelo. Calcule el ángulo que debe formar la rampa con la horizontal.

22) Una caja (paralelepípedo recto-rectángulo) tiene 8 cm x 6 cm x 4 cm. Calcule el ángulo formado por la diagonal de la base y la diagonal de la caja (ambas diagonales parten del mismo vértice).

23) Un topógrafo utiliza un instrumento denominado teodolito para medir el ángulo de elevación entre la cima de la montaña y el nivel del suelo. En un punto, el ángulo de elevación mide 41°, medio km más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 37°¿Qué tan alta es la montaña?

24) Un ingeniero se dedica a construir puentes levadizos de longitud L. Cuando están cerrados, sabe que las dos secciones del puente pueden girar hacia arriba. Si el nivel del agua está 15 pies por debajo del puente, calcule la distancia (d) entre el extremo de una sección y el nivel del agua cuando el puente (150 pies de longitud en posición normal) se encuentra totalmente abierto y θ = 35°.



25) Determine para el caso a) la separación (D) entre los extremos de las dos secciones cuando el puente está totalmente abierto.

26) Calcular la proyección horizontal de un tramo de camino rectilíneo de 402 m cuya pendiente forma con el plano horizontal un ángulo de 7° 46'.

27) Hallar el desnivel entre dos puntos de un camino recto separado por una distancia de 670 m sabiendo que la pendiente es de 6°5'.

28) Un edificio cuya altura es de 32,6 m proyecta una sombra de 23,12 m. Calcular el ángulo que el rayo proyectante determina con el suelo (altura del sol).

29) Calcular el valor del ángulo B de un triángulo CAB, rectángulo en A, que tiene una hipotenusa de 50 cm y el cateto c es de 39,8 cm.

30) Calcularlos ángulos que la diagonal AC de un rectángulo ABCD forma en los vértices respectivos, sabiendo que AC = 10 cm y AB = 8cm.

31) Dos ciudades A y B están separadas por un lago. Se desea conocer la distancia que las separa, para ello desde una tercer ciudad C, accesible desde A y desde B se miden las distancias AC = 30 km y BC 50 km, además el ángulo formado por AC y BC es de 35° 48'. Realizar un diagrama y determinar la distancia buscada.

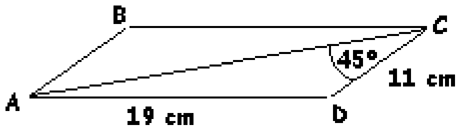
32) Determinar la altura de un edificio si al mirar su terraza desde un punto A el ángulo de elevación es de 63° 12' y desde un punto B, que se halla a 95 m de A, el ángulo de elevación es de 35° 41'.

33) Si dos observadores ven un avión con ángulos de elevación de 53° y 38° respectivamente y se hallan ubicados a distintos lados de la vertical a una distancia entre ellos de 300 m ¿Cuál es la altura del avión?

34) Un terreno triangular tiene lados de longitud 35, 40 y 60 metros respectivamente. Encuentre el ángulo interior más grande del triángulo.

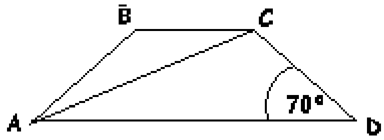
35) Dos autos parten de la intersección de dos carreteras rectas y viajan a lo largo de ellas a 80 km/h y 100 km/h respectivamente. Si el ángulo de intersección de las carreteras es de 80°, ¿qué tan separados están los automóviles al cabo de 45 minutos?

36) Hallar las longitudes de las diagonales del paralelogramo ABCD y la amplitud del ángulo obtuso que estas determinan al cortarse en un punto o.



37) Hallar la longitud de los dos lados iguales del trapecio isósceles ABCD y de la base menor

AC= 9,6 dm
AD= 10 dm



Unidad 4: “Figuras y cuerpos”

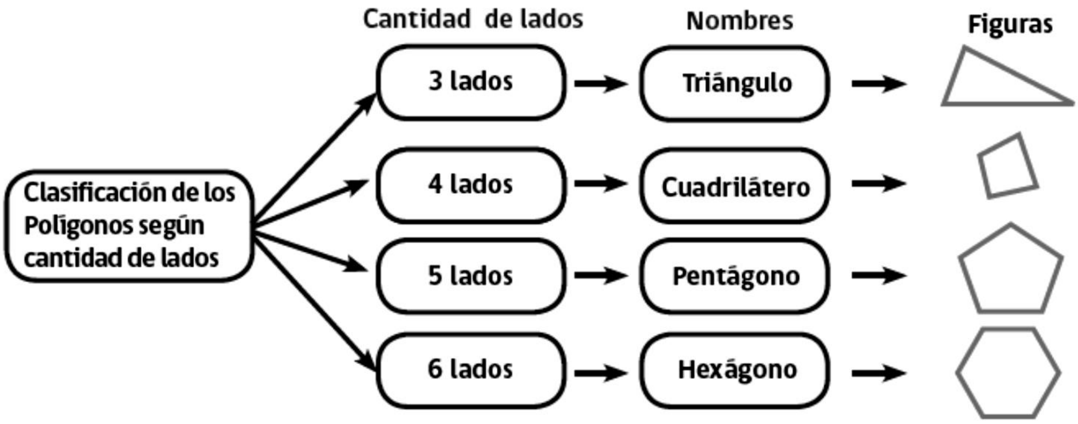
Es el propósito de esta unidad conocer las figuras y cuerpos más simples para descomponer una figura o cuerpo complejo en partes simples y así poder calcular sus propiedades geométricas básicas sin tener que estudiar de memoria un compendio interminable de fórmulas. Verá que de este modo se pretende razonar y **las fórmulas que debe memorizar son muy pocas**, concretamente son:

- *Área de un rectángulo*
- *Área y perímetro de un circulo*
- *Volumen de un paralelepípedo recto rectangular*
- *Volumen de un prisma*
- *Área y volumen de una esfera*

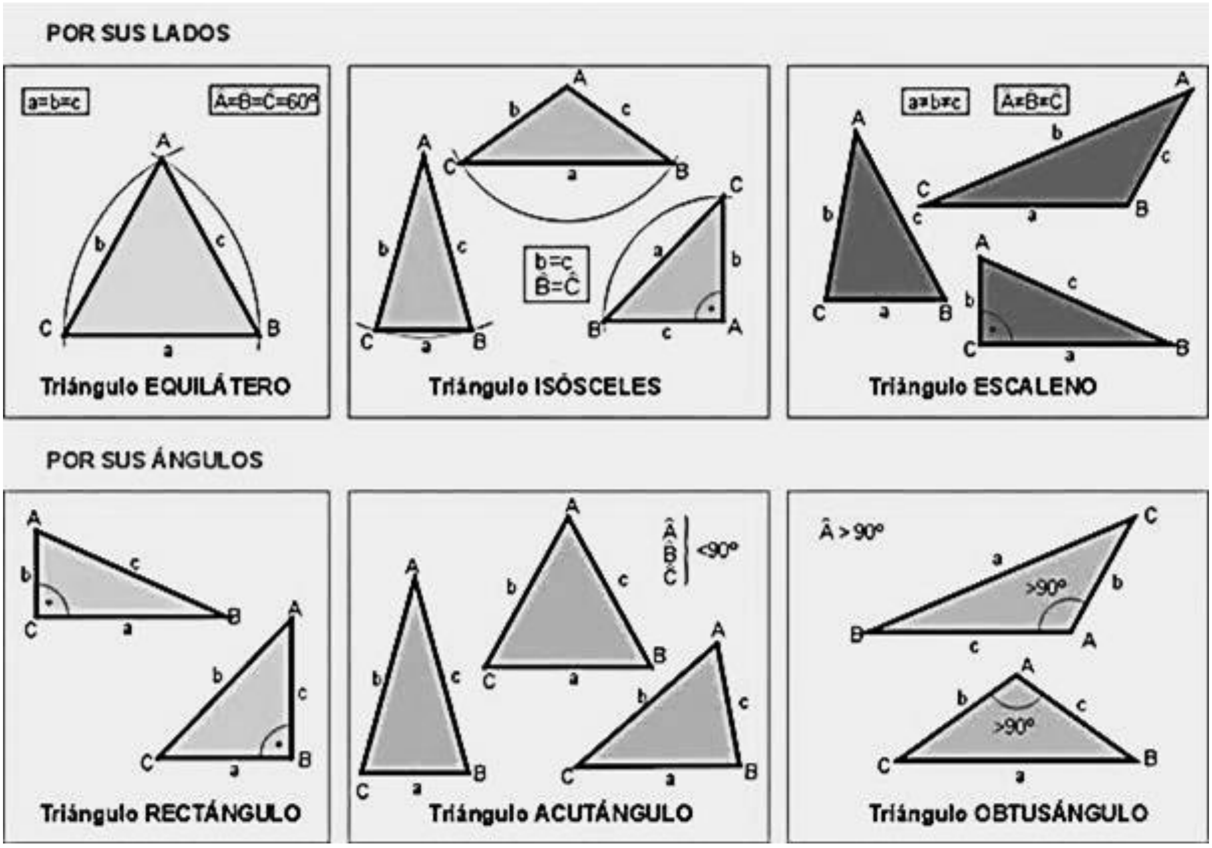
Así descubriremos, por ejemplo, que un triángulo ocupa la mitad del área de un rectángulo cuyos lados coinciden con la base y la altura del triángulo.
Solucionar problemas geométricos tiene un gran valor formativo, ya que nos obliga a pensar de una manera ordenada, reflexiva y lógica, al mismo tiempo que permite desarrollar la imaginación y la sensibilidad ante el arte, la naturaleza y en general ante diferentes situaciones de la vida cotidiana desde un punto de vista más analítico.

4.1) POLIGONOS Y FIGURAS REDONDAS

Una figura es todo espacio encerrado entre líneas (curvas y rectas). Se llama “polígono” a la figura definida por 3 o más segmentos rectos consecutivos. Los segmentos se llaman “lados” y los puntos de intersección se llaman “vértices”. Si los lados son iguales se denominan “polígonos regulares”.
Sus propiedades más importantes son forma y tamaño.
Los polígonos se clasifican según la **cantidad de lados** y según la medida de sus lados y de sus ángulos.

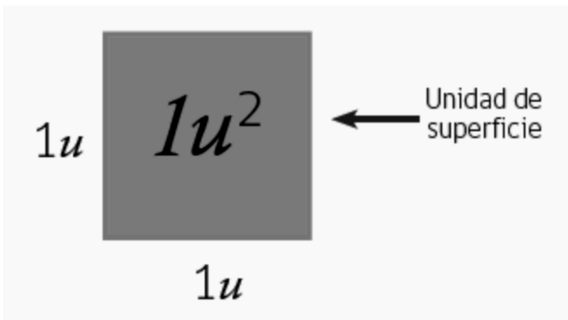


A partir del pentágono se nombran combinando un **prefijo numérico** (penta, hexa, etc) seguido del sufijo “**gono**”. Así, por ejemplo, un polígono de 10 lados se denomina “decágono”.
Se denomina polígonos **regulares** a aquellos cuyos lados (y por lo tanto sus ángulos) **son iguales**. De lo contrario, si al menos un lago (o un ángulo) es distinto al resto se denomina **irregular**. Así, por ejemplo, **un rectángulo es un cuadrilátero regular**.
Los triángulos se pueden clasificar por:

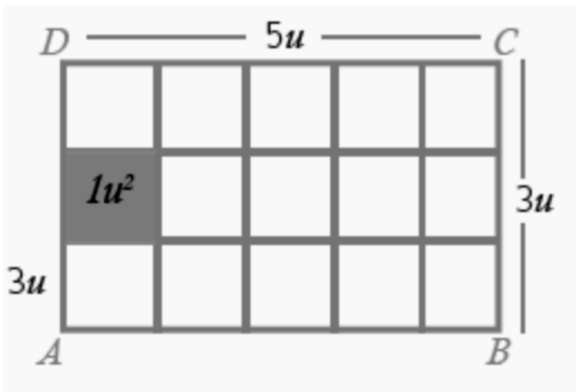


Se denomina **perímetro** de un polígono a la **suma de las longitudes de todos sus lados** y **área** a la **medida de la extensión de su superficie**.

Para calcular el área de una superficie debemos **compararla con otra que elegimos como superficie unitaria**, y averiguar **el número de unidades que contiene**. Por convención, la superficie unitaria elegida es la de **un cuadrado cuyos lados miden 1 unidad de longitud**.



Así, por ejemplo, calcular el área de un rectángulo significa determinar cuántos cuadrados de lado 1 unidad cubren la superficie.

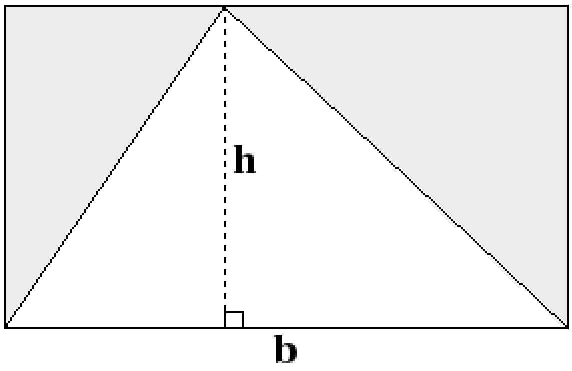


Piense y razone: ¿cuántos cuadrados hay dentro del rectángulo? ¿cómo hizo la cuenta?
Verá entonces que es muy fácil concluir que si ***a*** y ***b*** son las ***medidas de los lados*** del rectángulo

(que suelen llamarse base y altura según su posición) entonces su área se calcula como:

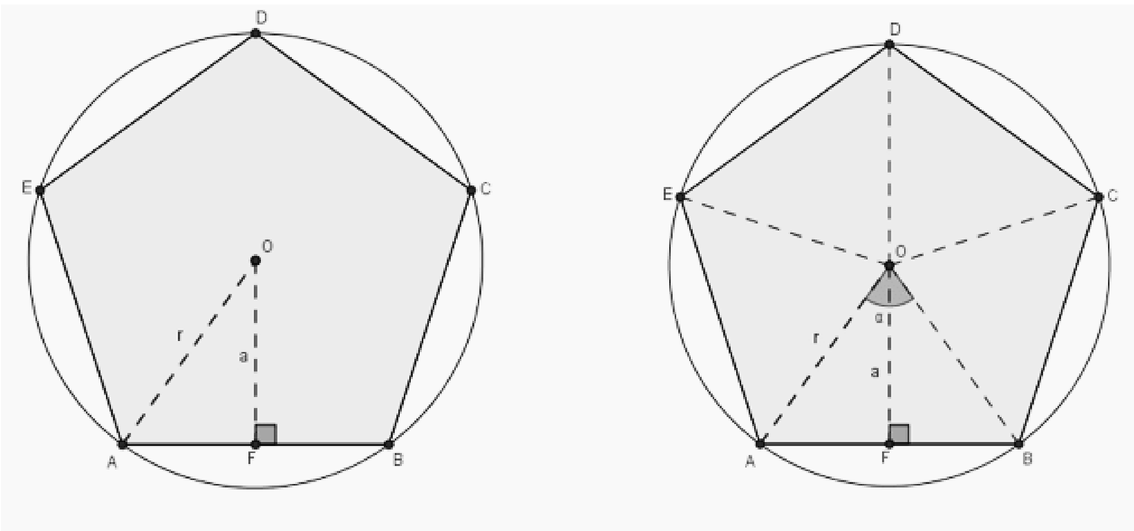
$$\textit{Area del rectángulo} = a.b$$

Veamos ahora que sucede con los triángulos. Observe la siguiente figura…



No es muy difícil percibir que el área del triángulo es la **mitad del área del rectángulo** cuyos lados coinciden con la base y la altura del triángulo. Ya sabemos calcular entonces el área de un triángulo.

¿Qué sucede con los polígonos regulares de 5 o más lados? La idea es inscribirlo en una circunferencia y dividirlo en triángulos, de modo de calcular el área de cada triángulo y multiplicarla por el número de lados. Veamos…

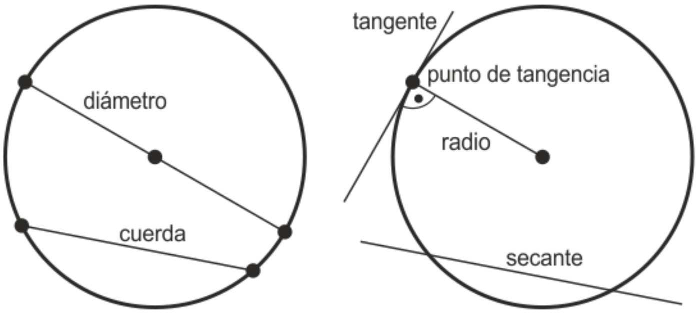


Analice y piense como dibujaría el polígono regular de la figura usando un compás y un transportador.

FIGURAS CIRCULARES

Se denomina **circunferencia** a la línea curva y cerrada formada por todos los puntos que están a igual distancia de un punto llamado **centro**. Dicha distancia se llama **radio**, y su duplo se denomina **diámetro**.

Se denomina **círculo** a la figura encerrada dentro de una circunferencia.



Tanto la longitud de la circunferencia como el área del circulo son directamente proporcionales a su diámetro (o si se quiere a su radio). Esto quiere decir que si dividimos la longitud de la circunferencia por su radio obtenemos un **valor constante**. Dicho valor, por su importancia, se representa simbólicamente con la letra griega **π** (pi).

$$\pi = L / D \qquad \text{por lo tanto} \qquad L = \pi D = 2\pi R$$

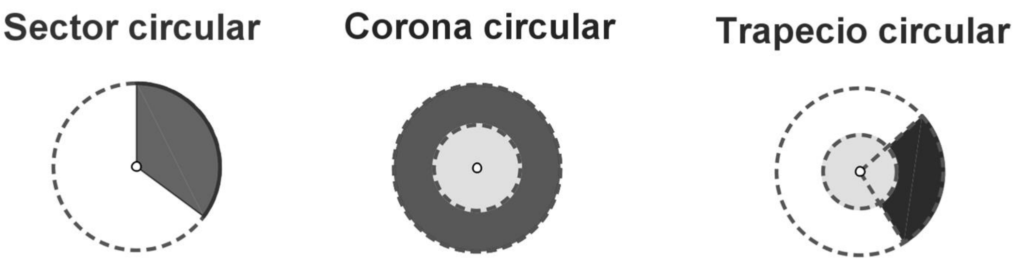
Se puede demostrar (no es fácil hacerlo) que se trata de un **número irracional**, eso es, que en su notación decimal posee un desarrollo decimal infinito no periódico. Como todo número irracional puede expresarse como una suma infinita:

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots$$

Su **aproximación racional** con 5 cifras significativas es:

$$\pi \approx 3{,}1416$$

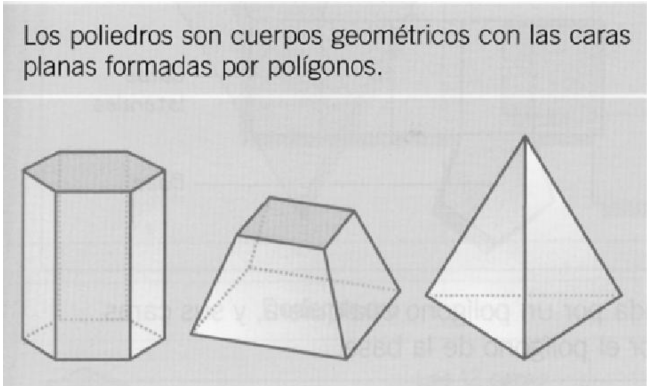
Veamos las siguientes figuras circulares:

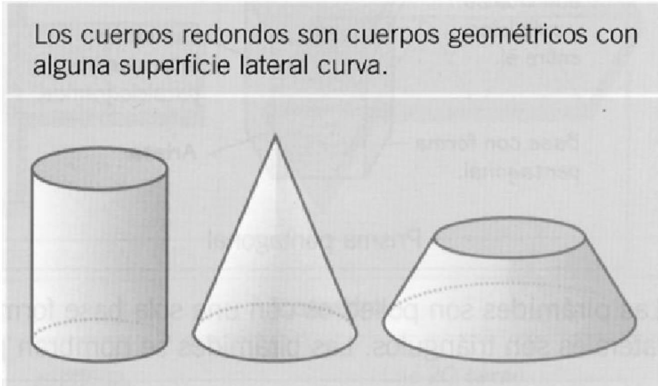


Piense y razone como calcularía la superficie de cada una conociendo el ángulo abarcado por el sector y los radios de las dos circunferencias.

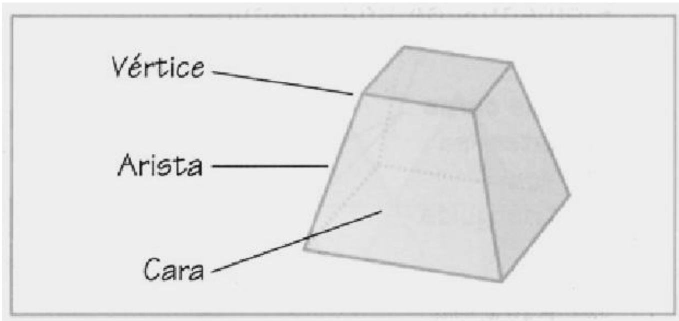
4.2) POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS

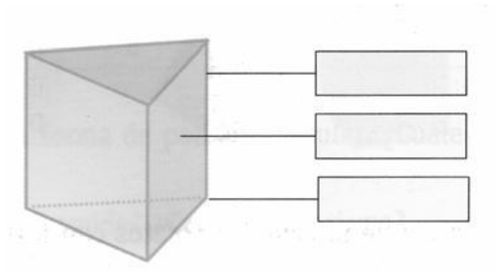
Se llaman **poliedros** todos los cuerpos geométricos que tienen todas sus caras planas. Los **cuerpos redondos** son aquellos que tienen alguna de sus superficies curva.





Aunque su forma sea muy diferente, en todos los poliedros podemos observar algunos elementos comunes: ***caras, vértices y aristas***.





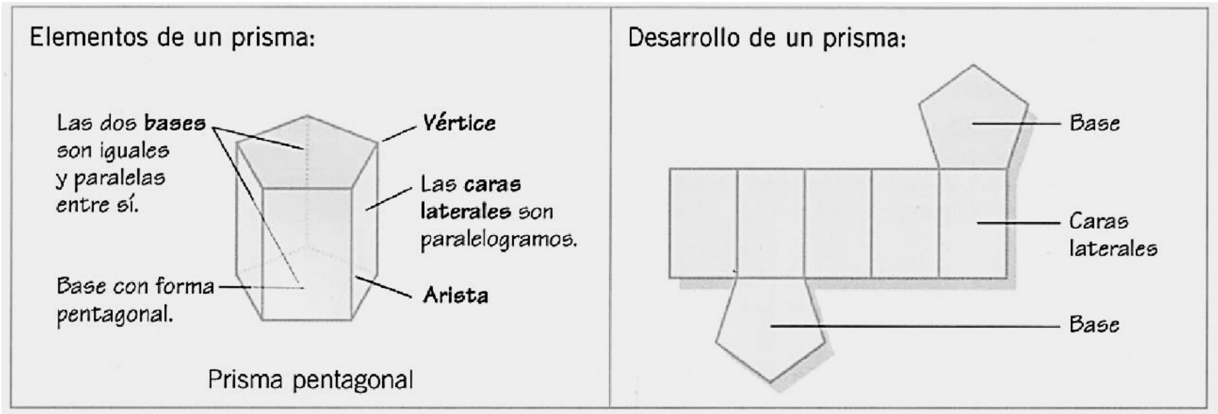
Observa este poliedro y contesta:

a) ¿Cuántas caras tiene?
b) ¿Qué polígonos forman sus caras?
c) ¿Cuántas aristas tiene?
d) ¿Cuántos vértices tiene?

LOS PRISMAS

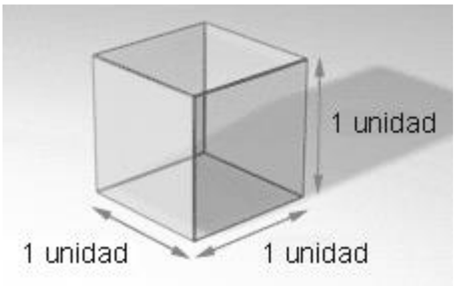
Los prismas son poliedros formados por dos bases iguales y cuyas caras laterales son paralelogramos. Los prismas se nombran por el polígono de sus bases.

Un prisma característico es el **paralelepípedo recto rectángulo**, esto es, un prisma cuyas caras son rectángulos. Básicamente es lo que en el lenguaje cotidiano llamamos una "caja". En particular, si sus caras son cuadrados se denomina **cubo**.

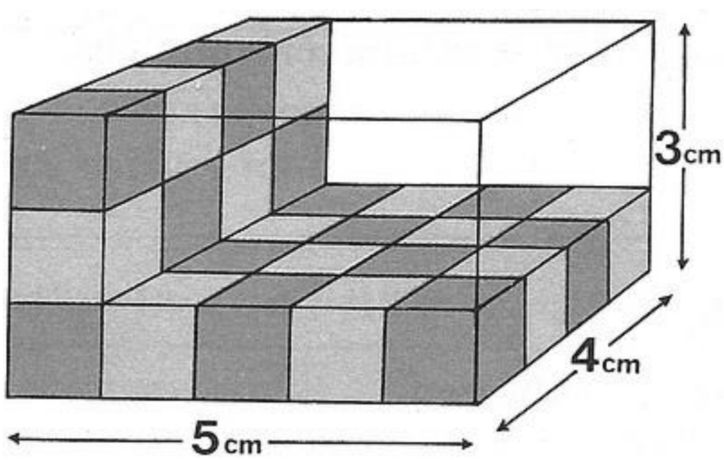


A partir de este momento prestaremos especial atención al cálculo del **volumen** de algunos cuerpos, esto es, una medida del **espacio que ocupan en tres dimensiones**.

Para calcular el volumen de un cuerpo debemos **compararlo con otro que elegimos como volumen unitario**, y averiguar **el número de unidades que contiene**. Por convención, el volumen unitario elegido es el de **un cubo cuyas aristas miden 1 unidad de longitud**.



Así, por ejemplo, calcular el volumen de un paralelepípedo recto rectángulo significa determinar cuántos cubos de arista 1 unidad ocupan su volumen.



Piense y razone: ¿cuántos cubos de 1 cm de arista hay dentro del paralelepípedo? ¿cómo hizo la cuenta?
Verá entonces que es muy fácil concluir que si ***a***, ***b*** y **c** son las ***longitudes de las aristas*** entonces su volumen se calcula como:

Volumen del paralelepípedo = a.b.c

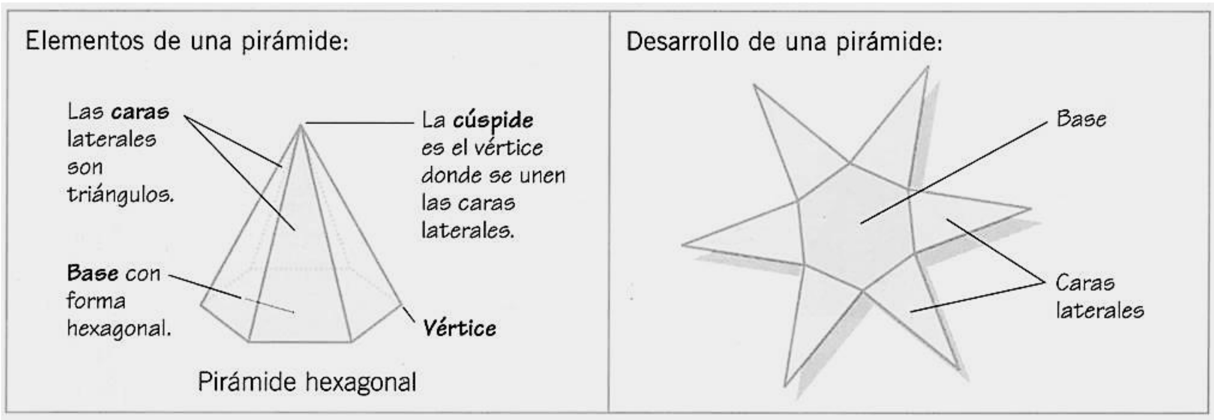
Si a y b son los lados de la base y c la altura…

Volumen = Área de la base x Altura

Fórmula válida para cualquier prisma.

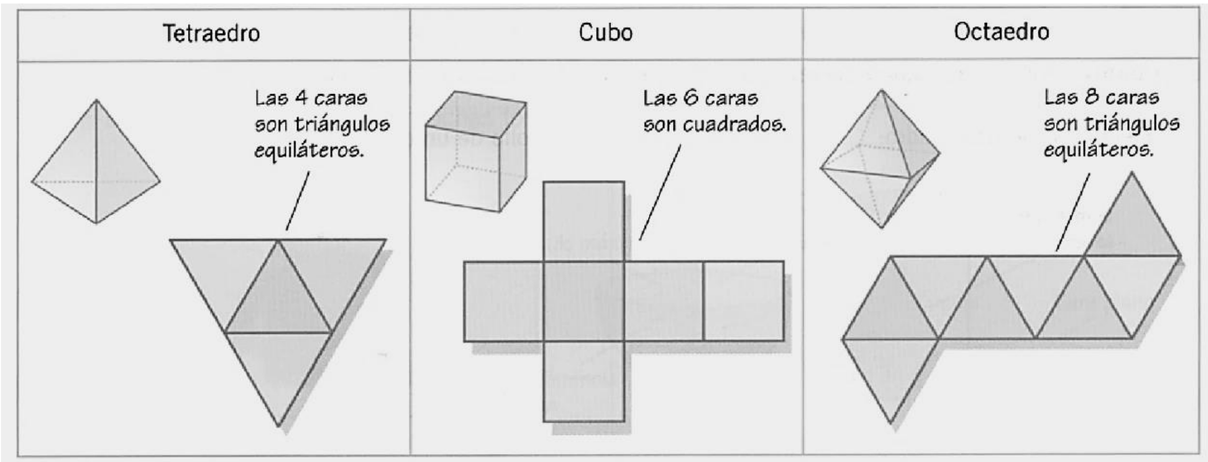
LAS PIRÁMIDES

Las pirámides son poliedros con una sola base formada por un polígono cualquiera, y sus caras laterales son triángulos. Las pirámides se nombran por el polígono de la base.



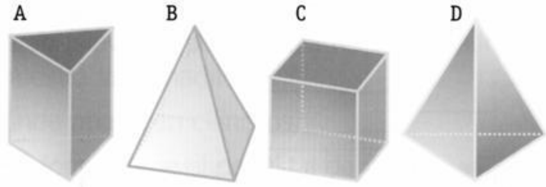
LOS POLIEDROS REGULARES

Cuando todas las caras de un poliedro son polígonos iguales y regulares decimos que el poliedro es **regular**.



Los poliedros regulares se nombran combinando un **prefijo numérico** (*que indica el número de caras que posee*) seguido del sufijo "**edro**". Así, por ejemplo, un poliedro de 12 caras se denomina "dodecaedro".

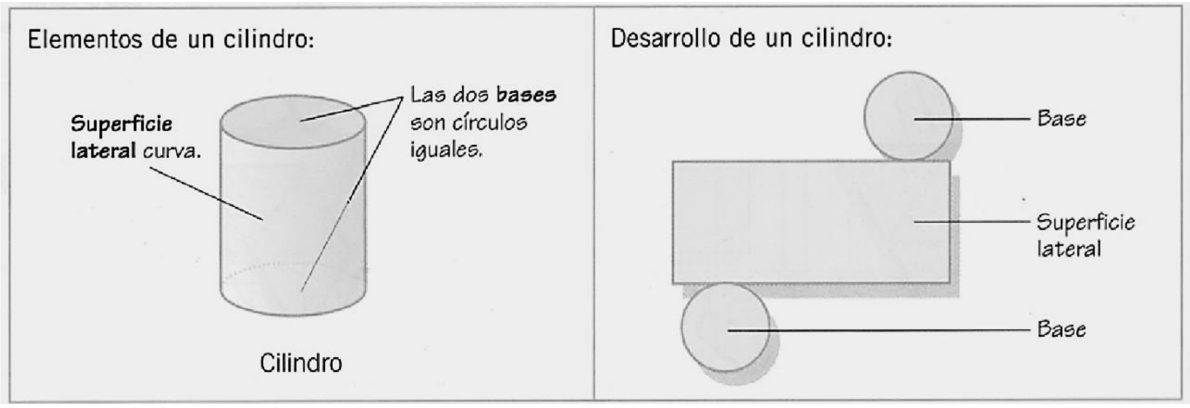
Observa estos cuerpos…



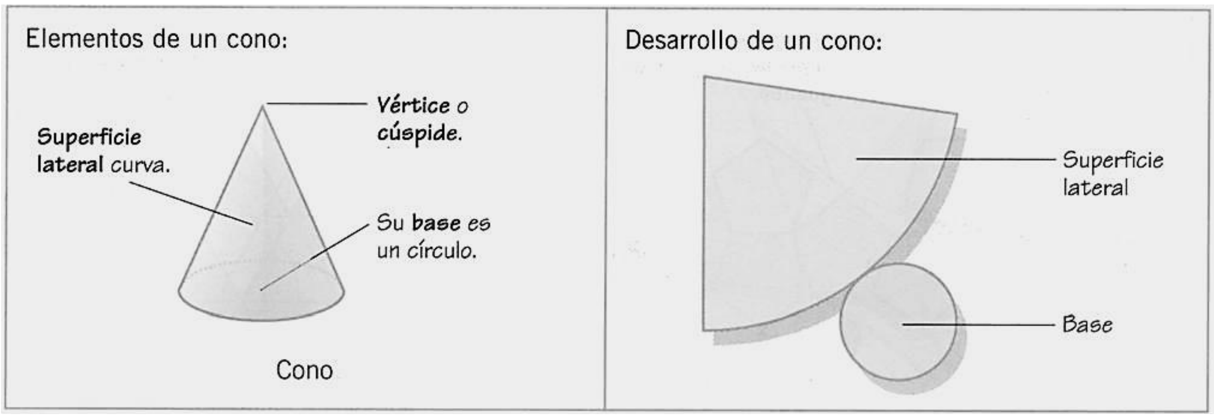
Identifica: (a) polígono de la base, (b) polígonos de las caras laterales y (c) nombre del cuerpo. ¿Cuál de ellos es una pirámide? ¿Cuál es un prisma?

EL CILINDRO Y EL CONO

El cilindro y el cono son cuerpos redondos porque sus superficies laterales son curvas. El cilindro está formado por 2 bases iguales que son círculos, y una superficie lateral curva.

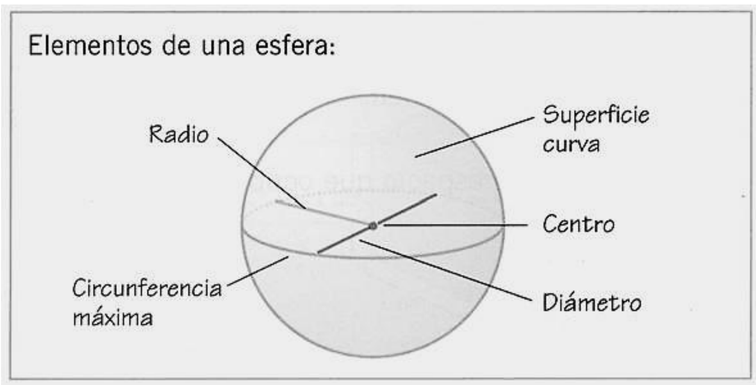


El cono tiene una sola base, que es un círculo, y una superficie lateral curva.



LA ESFERA

La esfera es un cuerpo redondo, sin caras, formado por un sola superficie curva. A diferencia del cilindro y el cono, la esfera no tiene un desarrollo plano. Una esfera se puede cortar en muchas formas diferentes.



ÁREA Y VOLUMEN

El área de los cuerpos geométricos es igual a la suma de las áreas de sus caras. Como ya vimos, el volumen de los cuerpos geométricos que "***no terminan en punta***" (cubo, prisma, cilindro) es igual al producto del área de la base por la altura del cuerpo.

Volumen = área de la base x altura

En los cuerpos que "***terminan en punta***" el volumen se calcula multiplicando el área de la base por la altura y dividiendo el resultado por tres.

$$\textbf{Volumen} = \frac{\textbf{área de la base x altura}}{\textbf{3}}$$

Puede demostrarse que el **área** y el **volumen** de la ***esfera*** son, respectivamente:

$$\boxed{A = 4\pi R^2} \quad \text{y} \quad \boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

UNIDADES

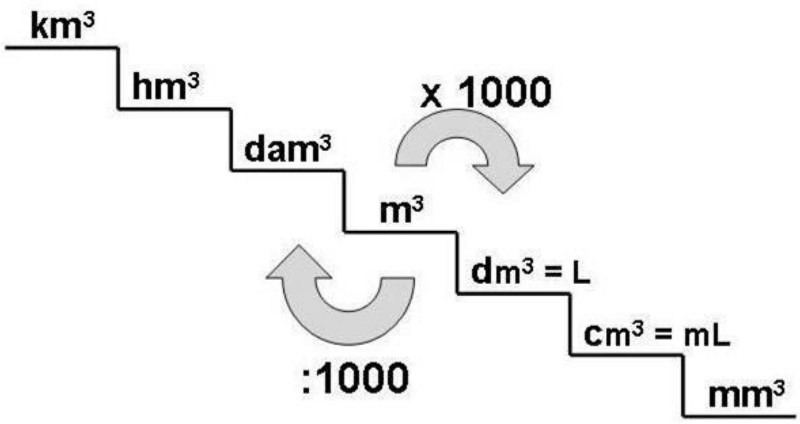
En el S.I. las unidades principales de área y volumen son el m^2 (metro cuadrado) m^3 (metro cúbico). Son, respectivamente, la superficie de un cuadrado de 1 m de lado y el volumen de un cubo de 1 m de arista (1 metro de largo, 1 metro de ancho y 1 metro de alto).

Considerando los ***múltiplos*** y ***submúltiplos*** de estas unidades principales:

- *Las unidades de superficie "van de cien en cien". Es decir, para pasar a una unidad inmediatamente superior dividimos por mil, y para pasar a una unidad de orden inmediatamente inferior multiplicamos por mil.*
- *Las unidades de volumen "van de mil en mil". Es decir, para pasar a una unidad inmediatamente superior dividimos por mil, y para pasar a una unidad de orden inmediatamente inferior multiplicamos por mil.*

$$\mathbf{1\ m^2 = 100\ dm^3 = 10.000\ cm^2}$$
$$\mathbf{1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1.000.000\ cm^3}$$

Las unidades de volumen están relacionadas con las de "capacidad":
1 litro = 1 decímetro cúbico
1 kilolitro = 1000 litros = 1 metro cúbico



Expresa en m^2: 2,07 km^2, 0,003 hm^2 y 400 cm^2.
Expresa en m^3: 2,07 dam^3, 0,003 hm^3 y 400 dm^3.
Calcula a cuantos litros equivalen.

Serie de problemas Nº 4

1) Un cuadrado tiene por área 49 m^2. Calcular su lado y su perímetro.

2) El área de un rectángulo es de 42 dm^2. Calcular su perímetro si el rectángulo mide 7 dm de largo.

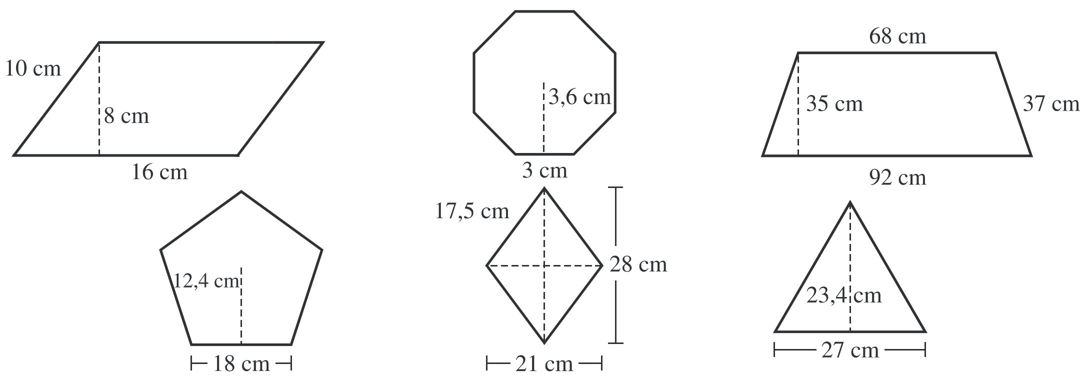
3) El área de un rombo es de 100 m^2. Calcular su diagonal menor si la diagonal mayor mide 10 m.

4) Calcular la medida de la base menor de un trapecio si la base mayor mide 8 dm la altura 3 dm y el área 21 dm^2.

5) Calcular el área de una corona circular que tiene de radio mayor 7 m y de radio menor 3 m.

6) Calcular el área de un círculo si su longitud de la circunferencia es de 628 m.

7) Calcular el área y perímetro de las siguientes figuras:



8) Determinar el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 18,84 m.

9) Hallar el área de un hexágono inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

10) Hallar el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.

11) Calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.

12) En un cuadrado de 2 m de lado se inscribe un círculo y en este círculo un cuadrado y en este otro círculo. Hallar el área comprendida entre el último cuadrado y el último círculo.

13) El área de un cuadrado es 2304 cm². Calcular el área del hexágono regular que tiene su mismo perímetro.

14) En una circunferencia de radio igual a 4 m se inscribe un cuadrado y sobre los lados de este y hacia el exterior se construyen triángulos equiláteros. Hallar el área de la estrella así formada.

15) Si los lados no paralelos de un trapecio isósceles se prolongan, quedaría formado un triángulo equilátero de 6 cm de lado. Sabiendo que el trapecio tiene la mitad de la altura del triángulo, calcular el área del trapecio.

16) A un hexágono regular 4 cm de lado se le inscribe una circunferencia y se le circunscribe otra. Hallar el área de la corona circular así formada.

17) En una circunferencia una cuerda de 48 cm y dista 7 cm del centro. Calcular el área del círculo.

18) Los catetos de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia miden 22,2 cm y 29,6 cm respectivamente. Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

19) Calcular el área de la corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de 8 m de diagonal.

20) Sobre un círculo de 4 cm de radio se traza un ángulo central de 60°. Hallar el área del segmento circular comprendido entre la cuerda que une los extremos de los dos radios y su arco correspondiente.

21) Dado un triángulo equilátero de 6 m de lado, hallar el área de uno de los sectores determinado por la circunferencia circunscrita y por los radios que pasan por los vértices.

22) La diagonal de una granja cuadrada tiene 10 km más que uno de sus lados. ¿Cuál es la longitud del lado de la granja?

23) Los lados de un rectángulo miden 1 y 2 m. ¿Es posible aumentar ambos lados con una misma cantidad para que el área se duplique?

24) En un rombo de 8m de perímetro, una de las diagonales mide el doble de la otra. ¿Cuánto mide su área en centímetros cuadrados?

25) El perímetro de un rectángulo mide 17 cm y su base mide 0,1 dm más que el doble de la altura. Calcular las medidas (en metros) de los lados del rectángulo.

26) ¿Qué círculo duplica su área al aumentar su radio en 3 cm?

27) ¿Quedan determinadas las dimensiones de un terreno rectangular sabiendo que su perímetro es de 300 m? ¿Y si además se sabe que el largo excede al ancho en 20 m?

28) Calcular el área y el volumen de un tetraedro de 5 cm de arista.

29) Calcular la diagonal, el área lateral, el área total y el volumen de un cubo de 5 cm de arista.

30) Calcular el área y el volumen de un octaedro de 5 cm de arista.

31) Calcular la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 dm^2 y 48 litros de capacidad.

32) Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un prisma cuya base es un rombo de de diagonales 12 y 18 cm.

33) Calcular el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de altura.

34) Calcular el área lateral, total y el volumen de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.

35) Calcular el área lateral, total y el volumen de una pirámide hexagonal de 16 cm de arista básica y 28 cm de arista lateral.

36) Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125,66 cm. Calcular el área total y volumen.

37) Para una fiesta, Luis debe hacer 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón deberá utilizar si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

38) Calcula el área lateral, total y el volumen de un cono cuya altura mide 4 cm y el radio de la base es de 3 cm.

39) Calcular el área lateral, total y el volumen de una pirámide de base cuadrada, cuya arista de la base mide 12 cm y la arista de las caras mide 20 cm.

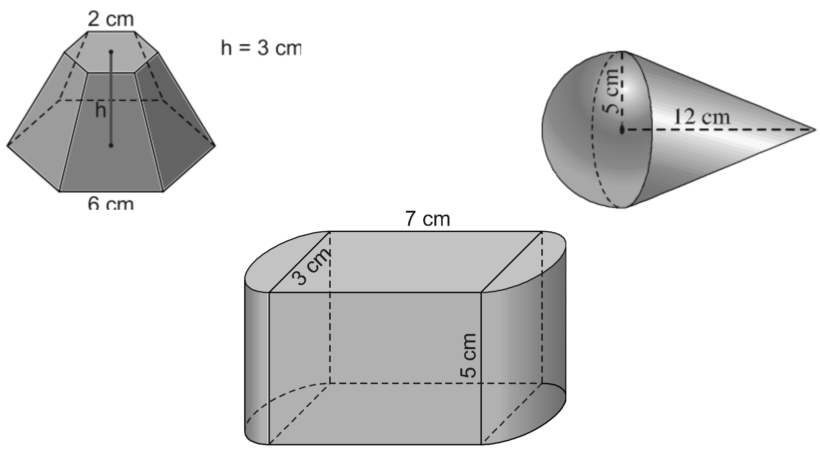
40) Hallar el área y el volumen de una esfera de 10 cm de diámetro.

41) Hallar el área y el volumen de una esfera cuya circunferencia máxima mide 47,1 cm.

42) Hallar el radio de una esfera cuyo volumen es 113,04 cm^3.

43) Si el área de una esfera es 100 cm^2 determina su diámetro.

44) Hallar el área y volumen de las siguientes figuras:



45) El área de una superficie esférica es igual al área total de un cilindro circular recto cuya altura es tres veces el radio de su base. Determine la razón entre el radio de la esfera y el radio del cilindro.

Unidad 5: "Ecuaciones de primer y segundo grado"

El lenguaje coloquial es el que se utiliza normalmente y está compuesto por palabras. El lenguaje algebraico es utilizado por la matemática para expresar propiedades o fórmulas y está compuesto por números, letras, operaciones, relaciones, conectivos, etc.

Veamos algunos ejemplos…

Lenguaje Coloquial	***Lenguaje algebraico***
Ocho es mayor que tres	$8 > 3$
El anterior del cuadrado de un número es 36	$z^2 – 1 = 36$
La suma entre dos números es trece	$a + b = 13$

Una expresión algebraica es una combinación de varios de los elementos que forman parte del lenguaje algebraico, que se utiliza para describir una idea matemática.

En las expresiones algebraicas que combinan números y letras hay dos igualdades diferentes.

- Una de ellas se cumple para cualquier valor numérico que se asigne a cada una de las letras y se llama **identidad**. Por ejemplo:
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
- El segundo tipo de igualdad se llama **ecuación y** es válida solo para ciertos valores numéricos de las letras. Fuera de esos valores sencillamente la igualdad no se cumple.

Resolver una ecuación es encontrar cuales son todos los valores particulares de las letras para que la igualdad se verifique.

6.1) Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Si las incógnitas están presentes cada una en un término diferente y elevadas a la primera potencia, las ecuaciones son de primer grado. Analizaremos en este curso solamente dos casos de ecuaciones de primer grado, con una incógnita y luego con dos.

Por ejemplo,
$$2x + 1 = 7$$
para que se cumpla la igualdad debe ser $x = 3$.

Nos detendremos ahora a analizar las ecuaciones lineales o de primer grado con una sola incógnita; es decir aquellas que se pueden llevar a la expresión:

$$\boldsymbol{ax + b = 0}$$

con $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ε **R**, con $\boldsymbol{a} \neq 0$ y $\boldsymbol{x}$ es la incógnita

Normalmente los matemáticos distinguen en el uso las primeras letras del abecedario (a, b, c...) de las últimas (x, y, z). En el primer caso se simbolizan valores numéricos especificados para cada caso (datos) ; en el segundo, los valores que no se conocen o incógnitas, que se pueden expresar en función de los datos del primer caso.

La solución de la ecuación es:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Como vemos este tipo de ecuación tiene una única solución que pertenece al conjunto de números reales

Ejemplos:

- Para 2x + 1 = 27 la solución es x = 13
- Para 3x – 25 = -19 la solución es x = 2

6.2) Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Las **ecuaciones de segundo grado** son aquellas donde la incógnita esta elevada al cuadrado (*y quizás también a un exponente menor*) y se pueden llevar a la forma:

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0} \\ \text{con } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}, \text{ con } \boldsymbol{a} \neq 0 \text{ y } \boldsymbol{x} \text{ es la incógnita} \end{array}}$$

a es el coeficientes del término de segundo grado
b es el coeficiente del término de primer grado
c es el término independiente.

Por ser una ecuación de segundo grado con una incógnita puede tener:

- dos soluciones reales (que llamaremos $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$)
- una única soluciona real (en este caso será $\mathbf{x_1 = x_2}$)
- ninguna solución real (en ese caso el valor de la incógnita **x** para que se cumpla la igualdad en un numero complejo).

La solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita se encuentra mediante la ecuación resolvente

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Cuando escriba la solución con el símbolo ± recuerde que en realidad son dos ya que la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones y la fórmula resolvente expresa ambas.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El radicando de las expresiones $b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** y se simboliza Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Analizando el discriminante se sabe si existen dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales y dos raíces complejas. Según el signo del discriminante:

- Si **Δ > 0** la ecuación posee **dos raíces reales**
- Si **Δ = 0** la ecuación posee **una única raíz real**

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Si **Δ < 0** la ecuación posee **dos raíces reales**

Observemos los ejemplos:

Ejemplo 1

$x^2 - 3x = 4$

La llevamos a su forma estándar:

$x^2 - 3x - 4 = 0$

El discriminante es:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$

Es positivo, por lo tanto tiene dos raíces reales distintas:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Entonces…

x_1 = 4 y x_2 = 1

Ejemplo 2

$x^2 - 4x + 4 = 0$

El discriminante es:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

Es nulo, por lo tanto tiene una sola raíz real:

$$x = \frac{-(-4)}{2.1}$$

Entonces…

x = 1

Ejemplo 3

$x^2 - 2x + 5 = 0$

El discriminante es:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$

Es negativo, por lo tanto tiene dos raíces complejas conjugadas:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-16}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16.(-1)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i$$

Entonces…

x_1 = 1 + 2i y x_2 = 1 – 2i

6.3) Rectas

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas es una expresión de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

donde **A**; **B** y **C** son coeficientes, **x** e **y** son las variables.

La solución de estas ecuaciones es el conjunto de todos los **pares ordenados** que satisfacen la igualdad.

Un par ordenado es un conjunto ordenado de dos números reales, que se simboliza así:

$$(x, y)$$

Al primero de ellos se lo denomina **abscisa** y al segundo **ordenada**.

Con cualquier ejemplo se puede ver que al buscar dichos pares ordenados siempre podemos encontrar uno más, es decir que son tantos como uno quiera. Por lo tanto se dice que una ecuación de primer grado con dos incógnitas **tiene infinitas soluciones**.

Si los pares ordenados se representan en un sistema de ejes cartesianos obtenemos el grafico de una **recta**.

A los efectos de analizar el gráfico la ecuación anterior no es muy conveniente, por lo cual se suele reescribir de una forma distinta, que es la que en general conocemos:

$$y = ax + b$$

denominada ecuación **explícita** de la recta

donde ***a*** indica la **pendiente** y ***b*** la **ordenada al origen** (OAO).

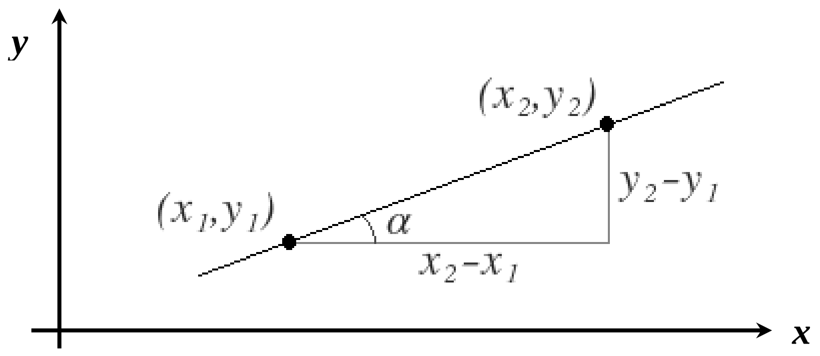
De esta manera se observa que:

- Si $a > 0$ la recta es **creciente**
- Si $a < 0$ la recta es **decreciente**
- El valor de ***b*** indica donde la gráfica corta el eje de las ordenadas
- El valor de x donde la gráfica corta el eje de abscisas está dado por: $-b/a$

¿Cómo calcular la pendiente de una recta?

Hay varias formas de calcular la **pendiente de una recta**, según cual sea la información que se tenga sobre la misma.

Si tenemos las coordenadas de dos puntos de una recta (x_1,y_1) y (x_2,y_2) para los puntos 1 y 2 respectivamente:



La distancia vertical la calculamos restando las coordenadas del eje y de cada punto, y la distancia horizontal, restando las coordenadas del eje x de cada punto. Por tanto m se puede calcular con esta fórmula:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = tan\alpha$$

¿Cómo calcular la ordenada al origen de una recta?
Una vez que conocemos la pendiente reemplazamos las coordenadas de un punto en la ecuación y = ax + b para hallar la OAO.
Si elegimos el punto (x_1,y_1) resulta $\mathbf{y_1 = ax_1 + b}$ de donde podremos despejar b.

Ejemplo
Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A = (1 ; 6) y B = (-2 ; 0)
Primero la pendiente…

$$a = \frac{6 - 0}{1 - (-2)} = 2$$

Luego la ordenada al origen…

$$y = 2x + b$$
$$6 = 2.1 + b$$
$$b = 4$$

Finalmente la ecuación queda…

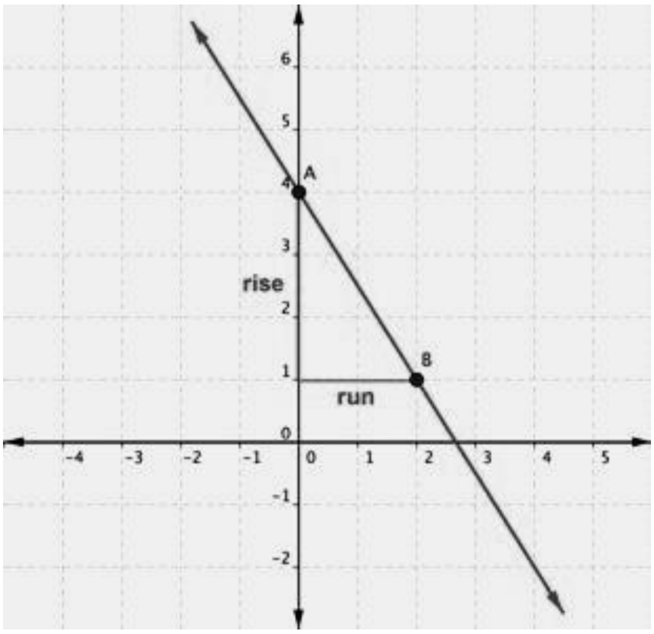
$$y = 2x + 4$$

¿Cómo trazar el gráfico a partir de la ordenada al origen y la pendiente?
Primero se marca la OAO (b) y a partir de ahí teniendo en cuenta el valor de la pendiente, se corren tantas unidades en el eje ordenado como el numerador de la pendiente y tantas unidades en el eje de abscisas (hacia arriba si es positivo y hacia abajo si es negativo) como el denominador de la misma.
Al expresar la pendiente como fracción recuerde que por convención el denominador es siempre positivo y el signo de la fracción es el signo del numerador.

Ejemplo
Graficar la recta 2y + 3x – 8 = 0
Primer debemos escribirla en forma explícita despejando la y:

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

La pendiente es -3/2, por lo tanto marcamos la OAO sobre el eje y, y a partir de ese punto avanzamos dos unidades hacia la derecha y 3 hacia abajo, el orden en que se hagan es indistinto.



PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD
Los términos del título se refieren a la relación que guardan dos rectas entre sí. Para pensar y reflexionar La pregunta es: ¿Cuándo dos rectas son paralelas entre sí? ¿Qué condición se debe presentar para que sean paralelas? Podemos resolver estos interrogantes con las herramientas adquiridas y con el lenguaje pertinente.

Las rectas paralelas son dos o más rectas en un plano que nunca se intersectan. Hay muchos ejemplos de rectas paralelas como los lados opuestos del marco rectangular de una pintura y los estantes de un librero.

Las rectas perpendiculares son dos o más rectas que se intersectan formando un ángulo de 90 grados o rectos.

Dada las rectas:

$$y_1 = a_1x + b_1 \qquad\qquad y_2 = a_2x + b_2$$

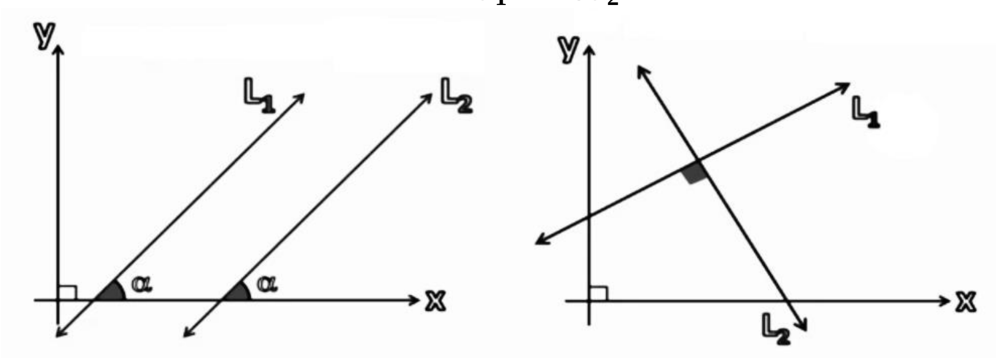
Resultan ser:

- **PARALELAS**: si poseen la misma pendiente

$$a_1 = a_2$$

- **PERPENDICULARES**: si poseen pendientes opuestas e inversas

$$a_1 = -1/a_2$$

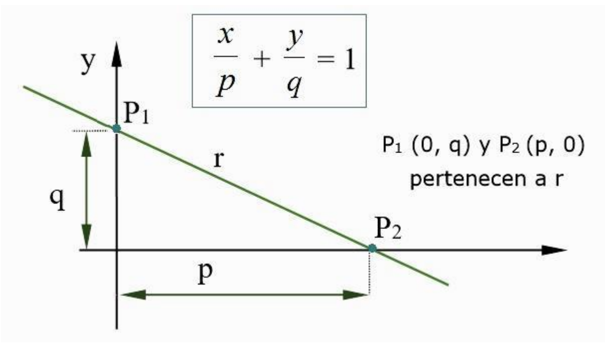


Otra forma útil de expresar la ecuación de una recta es la siguiente:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Conocida como **ecuación segmentaria** de la recta, donde:

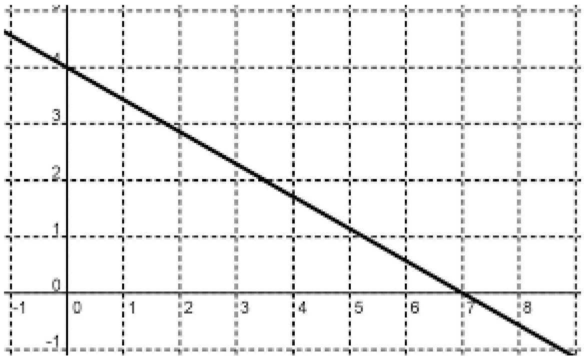
- ***q*** es la ordenada al origen (OAO)
- ***p*** es la abscisa al origen (AAO)



La expresión canónica de una recta es la más útil para graficarla. Veamos un ejemplo:

Graficar la recta:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{4}=1$$



6.4) Parábolas

Una ecuación de segundo grado con dos incógnitas es una expresión de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0$$

donde **A**, **B**, **etc** son los coeficientes, ***x*** e ***y*** son las variables. Sin embargo, en este curso trabajaremos solo **un caso particular** de ecuación de segundo grado con dos incógnitas, esta es:

$$Ax^2 + By + Cx + D = 0$$

Conocida como **ecuación implícita de una parábola de eje vertical**.

El conjunto solución de la misma está formado por **todos los pares ordenados** que satisfacen la igualdad. Por ser ecuación con dos incógnitas tiene **infinitas soluciones**. Si las mismas se representan en un sistema de ejes cartesianos se obtiene una gráfica muy peculiar denominada **parábola**.

Se puede demostrar que esta ecuación se puede expresar de tres formas equivalentes:

- Ecuación **explícita**

$$y = ax^2 + bx + c$$

- Ecuación **factorizada**

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

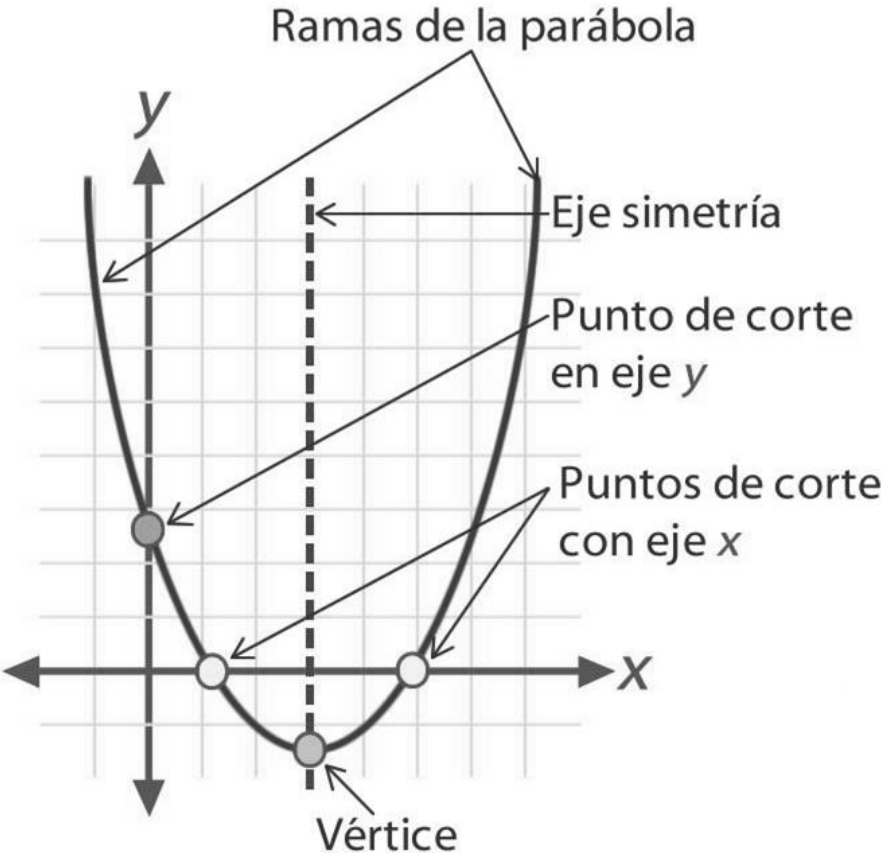
- Ecuación **canónica**

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v$$

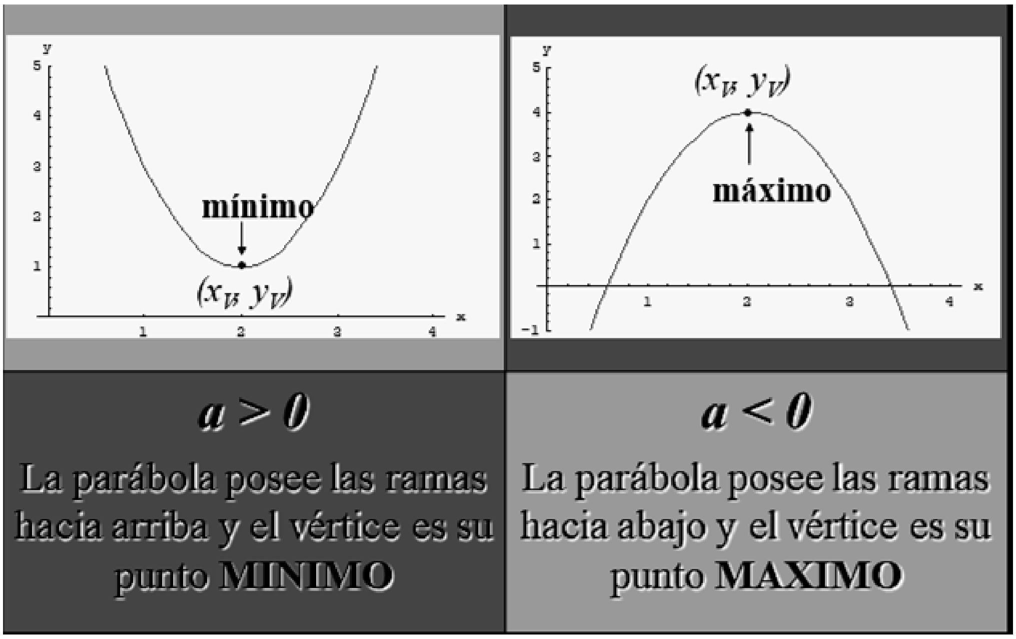
Donde:

- a es el **coeficiente principal**
- c es la **ordenada al origen**
- x_1 y x_2 son la **raíces** de la parábola ***(valores de x para los cuales y = 0)***
- x_V es la **abscisa del vértice** de la parábola
- y_V es la **ordenada del vértice** de la parábola

Veamos una gráfica típica de una parábola y sus principales características…



Según el signo del coeficiente principal tenemos…



Las **raíces** o **ceros** son los **puntos de corte con el eje x**. Se calculan con la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿Qué sucede si las raíces son **complejas conjugadas**? En este caso se concluye que la parábola **no corta al eje x**.

¿Y si las raíces son **reales e iguales**? En este caso se concluye que la parábola corta una sola vez el eje x, y esto solo es posible cuando **el punto de corte es el vértice**, por lo cual usando la fórmula resolvente resulta ser:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

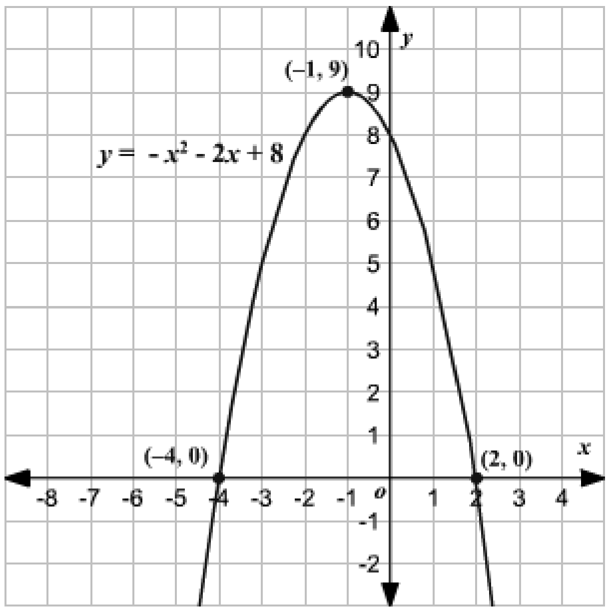
La gráfica de una parábola es **simétrica** con respecto a la recta vertical que pasa por su vértice, por lo tanto las raíces equidistan de la abscisa del vértice, entonces:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Para calcular y_v simplemente **reemplazamos x_v en la ecuación explícita** y hacemos las cuentas.

Veamos un ejemplo:

Graficar la parábola ***$y = -x^2 - 2x + 8$***



Comenzamos reconociendo los coeficientes:

$\boldsymbol{a} = -1$

$\boldsymbol{b} = -2$

$\boldsymbol{c} = 8$

Como el coeficiente principal es negativo la parábola tendrá las ramas hacia abajo.

Luego se pueden calcular las raíces usando la fórmula resolvente resultando (verifíquelo):

$\boldsymbol{x}_1 = -4$

$\boldsymbol{x}_2 = 2$

Y finalmente las coordenadas del vértice:

$\boldsymbol{x}_V = -b/(2a) = -(-2)/[\ 2.(-1)] = -1$

$\boldsymbol{y}_V = -(-1)2 - 2.(-1) + 8 = 9$

Serie de problemas Nº 5

1) ¿Qué número entero debe sumarse a 3 y 37 para que al multiplicarlos por 24 y 7, respectivamente, resulten iguales?

2) La amplitud en grados de un ángulo interior de un triángulo es el doble del menor y dos tercios del mayor. Dibuje el triángulo a escala si puede y sino explique porque no puede.

3) Un colectivo tarda 1 hora en ir de Laferrere a Don Torcuato. La mitad del trayecto va a 40 km/h y la otra mitad a 60. ¿cuántos km tiene el trayecto?

4) Cuando la bolsa de harina costaba $25 un panadero vendía el pan a $1,50 por Kg. Si la bolsa aumenta a $30 ¿a cuánto debe vender el pan para mantener la misma relación? Escriba una ecuación que relacione ambos precios de modo que aplicando cada nuevo precio de la bolsa de harina resulte el nuevo precio del pan.

5) Halle el número racional tal que el denominador sea 3 unidades mayor que el numerador y que si al numerador y al denominador se le suma 1, la fracción es equivalente a ½.

6) Si considero 3 veces los años que tendré dentro de 3 años y le resto 3 veces los años que tenía hace 3 años resulta exactamente los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tengo?

7) ¿Cuál es la longitud de una varilla si su quinta parte es roja, hay dos tercios pintados de blanco y restan aún dos metros por pintar?

8) Si en una fracción al numerador se la suma 2, la fracción que se obtiene es igual a 1/2. Por otro lado, si al denominador se le suma 1, la fracción que queda es igual 1/3. Encontrar la fracción.

9) Juan para ingresar a la universidad debe rendir un examen tipo “test” que consta de 20 preguntas. Por cada respuesta correcta obtiene 0,5 puntos y por cada respuesta incorrecta o no contestada se le resta 0,25. Si luego de corregida la prueba obtuvo 7 puntos, calcula cuántas respuestas correctas tuvo.

10) Una vendedora comenta que no importa si vende un par de zapatos a $ 31 o dos pares a $ 49, porque la ganancia resulta igual en cada venta. ¿Cuánto le cuesta un par de zapatos a la vendedora y cuál es su ganancia?

11) Varias personas deben pagar solidariamente en partes iguales la suma de $ 108000. Dos de ellas resultan insolventes y esto hace que la deuda de cada una de las restantes aumente en $ 9000. Hallar el número de deudores.

12) Un hombre que va por la calle se encuentra con varios mendigos. Lleva cierta cantidad de monedas y las quiere repartir en partes iguales. Dando a cada mendigo 25 centavos le faltan 10 centavos, y repartiendo a razón de 20 centavos por mendigo le sobran 25 centavos. Encuentra el número de mendigos y la cantidad de dinero que repartió.

13) Represente gráficamente:

$y = x$ $\qquad y = 2x$ $\qquad y = 0,5x$ $\qquad y= -0,75x$ $\qquad y = -3x$

Si en cada ecuación la incógnita x vale 3, ¿cuánto vale la otra incógnita?

14) Escriba en forma explícita la recta que pasa por los puntos (7,4) y (3,-2). Calcule la pendiente y la ordenada al origen.

15) Hallar las intersecciones con los ejes de las siguientes rectas:

$y = 2x - 3 \qquad y = -x + 4 \qquad y = -2 \qquad x = 3$

Expresarlas en forma segmentaria. Graficarlas.

16) Sean las rectas:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -x + 4$ c) $y = -2$

d) $x = 3$ e) $y = 3x$ f) $y = -3x + 6$

Hallar los puntos de intersección con los ejes; los puntos en que se intersecan dos cualesquiera de ellas y, si la hubiera, la recta que corta a las otras cinco. Resuelva primero gráficamente y luego verifique analíticamente.

17) Dadas las rectas:

$$(1 + 2k)\,x + 5y = 7 \qquad 4y + (2 + k)\,x = 8$$

Hallar para que valor de k resultan dichas rectas paralelas y para qué valor perpendiculares.

18) Una recta corta a los ejes en (4,0) y (0,2) delimitando con ellos un triángulo. Ahora imagine que el punto (4,0) es fijo y que la recta puede rotar. Encuentre la pendiente para que el área del triángulo sea 5.

19) Piense un rectángulo cuyo perímetro es 20 cm. Modelice con una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Llámelas ***x*** e ***y***; tómelas como abscisa y ordenada y represente 5 puntos en un SECO que cumplan la condición. Saque conclusiones del gráfico.

20) Las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son:

$$y = 0{,}7x + 0{,}8$$
$$y = -1{,}3x - 4$$

la primera relaciona el precio a que se pagaría un producto con la cantidad del mismo que están dispuestos a vender los proveedores, y la segunda relaciona el precio de un producto con la cantidad que, a ese precio, están dispuestos a comprar los consumidores. Represente gráficamente las dos rectas y determine el punto de corte en forma analítica y gráfica. Examinando sus gráficos ¿puede entender su significado?

21) El precio de un viaje en colectivo depende de los kilómetros recorridos. 57 kilómetros sale 28,5$ y si el viaje suma 68 km vale 34,0$. Encontrar la ecuación de la recta que relaciona los km con el precio. ¿cuánto cuesta hacer un viaje de 300 km? Si el pasaje vale 40$ ¿cuántos km tiene el recorrido?

22) En instalaciones eléctricas domiciliarias cada milímetro cuadrado de sección del cable soporta un máximo de 7 amperios de corriente. Diseñe un gráfico que permita calcular la máxima corriente para las secciones comerciales de cables (1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5 y 6). Si las fichas estándar soportan hasta 20 amperios ¿cómo le advertiría al instalador que va a usar su gráfico?

23) Una empresa calcula el valor actual V de una máquina (expresada en miles de pesos) después de t años de uso con la ecuación: $V = 50 - 1{,}8\,t$ ¿Cuánto vale la máquina nueva? Si se compró en 2004 ¿cuánto va a valer en 2013? ¿En qué año no va a valer nada? Si otra

máquina que se va a comprar en 2005 vale 35 mil pesos y se amortiza en 15 años ¿cómo expresaría analítica y gráficamente su valor actual?

24) Una familia recorre 3000 km por mes en el auto. Con 1 lt de nafta que vale 20$ andan 14 km ¿cuánto gastan por mes? Si usaran gas para hacer 14 km gastarían 0,8 m^3 (cada m^3 vale 7$) La inversión para poner gas en el auto son 24000$. ¿En qué tiempo recuperan la inversión? Escriba las ecuaciones y dibuje un gráfico para explicar la situación.

25) Una factura de energía eléctrica tiene un cargo fijo de 130$, 0,35 por cada kwh hasta 120 y los excedentes se cobran 0,5$ cada uno. Sobre el total se incrementa un 20% por tasas e impuestos. Encontrar las expresiones gráficas y analíticas del costo en función del consumo y calcular el pago por 122, y 215 kwh consumidos. Si se pagó 400$ ¿cuál fue el consumo?

26) Una empresa fabrica relojes. Su costo fijo anual es 240000$ y su costo variable es 23$/u . ¿cuántos relojes debe vender a 30, 35 y 40$ para ganar en los tres casos 130000$ en el año? Represente en un mismo gráfico los costos y los ingresos por ventas de la empresa en función de las unidades vendidas. Determine para las tres alternativas de precios de venta los respectivos puntos de equilibrio, o sea los relojes a vender para un resultado financiero neutro.

27) En cierta imprenta se hacen fotocopias con los siguientes precios: de 1 a 10 copias 1,2$/u, de 11 a 20, 1,0; de 21 a 50, 0,8 y desde 51 se cobra 0,7$/u. Representar el importe a pagar en relación al número de copias. Las rectas ¿son continuas o discontinuas? ¿cuántas son? ¿cuál de ellas tiene mayor pendiente? ¿hay alguna decreciente? Determinar analíticamente y gráficamente el valor de 85 fotocopias.

28) En una quinta tenemos una pileta de natación de 45000 lts de agua. Para vaciarla se dispone de una bomba de desagote que tiene un caudal de 800 lts por hora. Represente el volumen que queda en la pileta en función del tiempo de funcionamiento de la bomba. Calcular los tiempos insumidos para vaciar un cuarto, la mitad y toda la pileta. ¿Qué pasa si a las 12 hs me canso y alquilo una bomba portátil de 1200 lts por hora que conecto junto con la otra? Resolver usando ecuaciones y gráficos.

29) Exprese las siguientes ecuaciones en forma polinómica:

$(x - 2)(x + 3) = -7$ $\quad$ $(x - 5)^2 = 22$ $\quad$ $(3x + 1)^2 - 2x = 3$

Indique el valor de a, b y c en cada caso.

30) Resuelva las siguientes ecuaciones:

$3x^2 - 30x + 72 = 0$ $\quad$ $6x^2 - 60x = 0$ $\quad$ $\frac{1}{2} x^2 + 8 + 5x = 0$

31) Exprese en las dos formas indicadas en 5-2 las ecuaciones dadas:

a) $-3x(-5 + x) = 0$ $\quad$ b) $-30x = 33 - 3x^2$

c) $(x^2 + 25) = -10x$ $\quad$ d) $(7x^2 - 3)/4 = 141$

32) Resuelva completando cuadrados: $\quad$ $x(x - 14) + 11(3 + x) = 11x$

33) Determine para que valores reales de **k** las siguientes ecuaciones tienen dos raíces reales distintas; dos raíces iguales o dos raíces complejas:

a) $10x^2 - kx + 10 = 0$ $\quad$ b) $\frac{3}{2} x^2 + 3kx = -\frac{9}{2}$ $\quad$ c) $-4x = -4k - kx^2$

En todos los casos exprese también los valores posibles de k en forma gráfica.

34) Encuentre el valor de h para que:
a) $5hx^2 - (2h + 10)x + 4 = 0$ tenga una raíz doble
b) $3x^2 + hx - 2 = 0$ tenga una raíz igual a -2
c) $P(x) = x^2 + (3h - 22)x - (h - 8)^2$ sea divisible por $x + 2$

35) Determine el valor de k para que la ecuación $kx^2 - 3x + k = 0$ tenga raíces reales y distintas.

36) Determine todos los valores reales de k para los cuales la ecuación

$$4x^2 - 2x = -k$$

tiene dos raíces pertenecientes ambas al intervalo (-1, 1).

37) ¿Cuál es el número cuyo triple supera en 2 a su cuadrado?

38) Un estandarte de 40 x 30 cm^2 tiene una cruz roja, de ancho uniforme, que se extiende de lado a lado cubriendo la mitad del área. ¿cuál es el ancho de la cruz?

39) Un jardín rectangular tiene un área de 378 m^2 y el largo tiene 3 m más que el ancho. ¿cuál es el perímetro del jardín.

40) Una canilla puede llenar un tanque en 3 h menos que otra, y juntas lo llenan en 4 h. En cuanto tiempo lo llenaría cada canilla con la otra cerrada.

41) El cociente entre las dos raíces de una ecuación de segundo grado es 5 y la diferencia es 12. Escriba la ecuación en dos formas equivalentes.

42) Determine el valor real de k en la ecuación $\mathbf{x^2 + 2k^2 = 5kx}$ si sabe que la suma de sus raíces es igual a la mitad de su producto.

43) A un cuadro al óleo de 1,5 m por 0,90 m se le pone un marco rectangular. El cuadro colgado cubre en la pared un área de 1,6 m^2. ¿cuál es el ancho del marco?

44) Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 7m más que el otro y 2m menos que la hipotenusa. Calcule el área del triángulo.

45) Un estanciero vendió cierto número de reses por 1200 dólares. Si hubiera pedido la misma suma por tres reses menos habría aumentado el precio unitario 20 dólares. ¿Cuántas reses vendió y a qué precio cada una?

46) Una herencia de 60000$ debe repartirse entre herederos con los mismos derechos, pero dos renuncian a ellos en beneficio de los restantes que cobran entonces 1000$ más cada uno. ¿Cuántos herederos cobraron?

47) Calcule el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro es $3\sqrt{2}$.

48) Hallar dos números pares consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 100.

49) Hallar el valor del parámetro k para que el origen de coordenadas pertenezca a la parábola

$$y = x^2 - 4x + k + 1$$

50) Calcular el valor de c para que el punto (2,5) pertenezca a la parábola $y = x^2 + 2x + c$

51) Grafique tres parábolas tales que $b = 2a$ y $c = 3a$. Escriba para cada una de ellas la expresión canónica. Demuestre que la abscisa del vértice es –1 para las tres parábolas. ¿Y el valor de la ordenada?

52) Escriba en las formas polinómica, canónica y factorizada las parábolas que cumplan con las siguientes condiciones:
   a) El vértice es (-1/2 , 2) y la distancia de las raíces al eje de simetría es 2,5.
   b) El vértice es (0, -6) y el punto (3; 0) pertenece a la parábola.
   c) Las raíces son 3 y 5 y la ordenada del vértice es 4.
   d) Las raíces son 1 y 2 y $y_v = 2x_v$.
   e) Las raíces son 3/2 y 13/2 y la ordenada al origen es –39/2.
   f) Es simétrica respecto a la recta x = 2. El producto de sus raíces es 32/9 y el coeficiente principal es 1.

53) Analizar, graficar y explicar si las siguientes parábolas son iguales aunque estén situadas en lugares diferentes del plano:
   $y = x^2$ $\quad$ $y = x^2 + 3$ $\quad$ $y = x^2 - 8x + 16$ $\quad$ $y = x^2 - 4x$

54) Encontrar las raíces, el vértice, la ordenada al origen y el eje de simetría en las siguientes parábolas:
   a) $y = -x^2 + 4$
   b) $y = x^2 - 4x - 5$
   c) la que, en su expresión canónica, m = -3 y n = -2 y el coeficiente principal es –2.
   d) $y = 2(x + 3)(x - 0,5)$
   e) $y = 3(x + 3/2)^2 + ½$
   f) corta al eje x en (-1, 0) y (4, 0) y pasa por el punto (-4, -5/6)

55) Escriba la expresión gráfica, polinómica, factorizada y canónica de la ecuación de la parábola que tiene la misma forma que $y = 3x^2$ pero con vértice en (2, 7).

56) Las raíces de una parábola son $x_1 = 3/2$ y $x_2 = 13/2$ e interseca al eje y en el punto (0, -39/2). Determinar la ecuación de la parábola en sus formas polinómicas, factorizada y canónica, graficarla.

57) Grafique la ecuación original, y exprese la ecuación y la gráfica de las parábolas dadas después de realizar las traslaciones indicadas para cada caso:
   a) $y = 2x^2$ una unidad a la derecha y dos arriba
   b) $y = -1/2x^2$ tres unidades a la izquierda y dos abajo
   c) $y = 4/3x^2$ dos unidades a la izquierda y tres arriba

58) Graficar las siguientes parábolas:
   a) $y = x^2$
   b) $y = x^2 + 3$
   c) $y = x^2 - 5$
   d) $y = (x - 4)^2$
   e) $y = (x + 3)^2$
   f) $y = (x - 2)^2 + 5$

59) El producto de las raíces de una parábola es 1 y una de las raíces es igual a 5. ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría de esa parábola?

60) Determinar los intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad de las siguientes parábolas y representar gráficamente:
a) $y = x^2 - 3x + 2$
b) $y = -x^2 + 3x - 2$
c) $1 - x = -1/2x^2 + y$

61) La ecuación $y = -2/5(x - 200)^2 + 9000$ refleja la ganancia (y) por unidad vendida (x) de una empresa. ¿cuál es el piso mínimo para no perder y cuál es el número de unidades vendidas a partir de la cual el costo de ventas adicionales es tal que se empieza a perder? ¿Cuál es el número de unidades a vender para maximizar la ganancia?

62) En una isla se inició una colonia de venados con 100 ejemplares. Sea y el número de venados y x el número de años transcurridos. ¿Qué expresa la ecuación $y = -x^2 + 21x + 100$? ¿A partir de qué año la manada empieza a decrecer? ¿en qué año se extingue?

63) El dueño de una huerta de manzanas calcula que si se siembran 50 árboles por Ha. cada árbol dará 600 manzanas por año. Por cada árbol más por Ha, la producción anual de manzanas de cada árbol disminuirá en 6. ¿cuántos árboles deben sembrarse para maximizar la producción de manzanas? ¿cuál será en ese caso el número de manzanas obtenidas por cada ha?

Unidad 6: “Expresiones algebraicas”

Analicemos la siguiente situación:
Una empresa necesita envasar un producto en recipientes de latas cilíndricas, de manera tal que el diámetro de la base sea la mitad de la altura.

a) *¿Con qué dimensiones las latas si estas deben tener una capacidad de 350 cm^3?*
b) *Encuentre una fórmula que le permita calcular el volumen de la lata en función de la altura*

Para la resolución del problema, en primer lugar debemos encontrar una relación entre las dimensiones de las latas y su volumen. Sabemos que el volumen de un cilindro se calcula mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$, donde **r** es el radio de la base del cilindro y **h** su altura; luego, $350 = \pi r^2 h$. Pero

$$r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4}h$$

luego,

$$350 = \pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{16}h^3$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{350.16}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$$

Con lo cual, si la lata tiene 350 cm^{3}debe tener una altura $h = \sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$

y un radio $r = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$

La fórmula que nos permite calcular el volumen de la lata en función de la altura es

$$V(h) = \frac{\pi}{16}h^3$$

Consideremos esta otra situación:
Claudia se compró un terreno en un country y quiere instalar allí una pileta de natación rectangular. El arquitecto le dijo que para que el diseño sea armonioso, su pileta debe tener el doble de largo que de ancho, y los entendidos opinan que la profundidad debe ser la mitad del ancho. Para hacer un presupuesto, averigua que el material para las paredes y el piso cuesta \$ 75 el m^2; la soldadura para las juntas, \$ 40 el m; la excavación y colocación, \$ 50 el m^3 y el traslado de materiales, \$ 100.

a) *¿Cuánto le costará a Claudia una pileta de 5 m de ancho?*
b) *Si Claudia dispone de \$10000, ¿puede construir una pileta de 8m de largo?*
c) *¿Cuáles son las dimensiones de la pileta más grande que puede construir con \$ 5665?*

Para resolver esta situación analicemos que sucede si la pileta de Claudia tiene 5 m de ancho, entonces debería tener 10 m de largo y 2,5 m de altura, entonces:

Cantidad de material necesario para el piso	$5 \times 10\ m^2 = 50\ m^2$
Cantidad de material necesario para dos paredes laterales	$2(5 \times 2{,}5\ m^2) = 2 \times 12{,}5\ m^2 = 25\ m^2$
Cantidad de material necesario para las otras dos paredes laterales	$2(10 \times 2{,}5\ m^2) = 2 \times 25\ m^2 = 50\ m^2$
Cantidad total de material necesario	$50\ m^2 + 25\ m^2 + 50\ m^2 = 125\ m^2$

El **costo del material** es entonces: \$75x 125 = **\$ 9375**

Tenemos en total 8 juntas: 4 de 2,5 m, 2 de 10 m y 2 de 5 m, es decir, necesitamos (4 x 2,5 + 2 x 10 + 2 x 5)m = 40 m de soldadura.

El **costo de la soldadura** será: \$ 40 x 40 = **\$ 1600**

Para saber el costo de colocación, necesitamos conocerlos m^3 que se van a colocar.

El volumen de la pileta es $5 \times 10 \times 2{,}5\ m^3 = 125\ m^3$, por lo tanto, el **costo de excavación y colocación** será: \$50 x 125 m^3 = **\$6280**

Entonces, el costo total de la pileta será: \$ 9375 + \$ 1600 + \$6280 + \$ 100 = \$17355

Si la pileta debe tener 8 m de largo, entonces tendrá 4 m de ancho y 2 m de alto, por lo tanto:

Costo de materiales	(8 x 4 + 8 x 2 x 2 + 4 x 2 x 2) x 75 = \$ 6000
Costo de soldadura	(8 x 2 + 4 x 2 + 2 x 4) x 40 = \$ 1280
Costo de excavación y colocación	(8 x 2 x 4) x 50 = \$3200
Costo de traslado	\$ 100
Costo total	\$ 10580

Para poder saber cuáles son las dimensiones de la pileta que se puede construir con \$ 5665, tenemos que encontrar una fórmula que nos permita calcular el costo de la pileta en función de su ancho.

Llamemos, entonces, x al ancho de la pileta; luego, el largo es 2x y la profundidad es $\frac{1}{2}$ x.

Costo de materiales	$(x.2x + 2x.\frac{1}{2}x.2 + x.\frac{1}{2}x.2).75 =$ $= (2x^2 + 2x^2 + x^2).75 = 5x^2.75 = \$375x^2$

Costo de soldadura	$2x.2+x.2+\frac{1}{2}x.2).40=$ $=(4x+2x+x).40=7x.40=\$280x$
Costo de excavación y colocación	$(x.2x.\frac{1}{2}x).50=\$50x^3$
Costo de traslado	$ 100
Costo total	$50x^3+375x^2+280x+100$

Por lo tanto, tenemos que resolver la ecuación $50x^3+375x^2+280x+1000=5665$

Como vemos, esta ecuación es distinta de las conocidas hasta el momento, porque tiene un termino con x^3, x^2 y x. Dado que no podemos despejar x, ni tampoco conocemos alguna fórmula que la resuelva, analicemos qué se puede hacer.

Para ello, debemos definir previamente varios conceptos.

Es frecuente la utilización de letras como soporte para representar leyes y propiedades, como así también para el planteo de ecuaciones e inecuaciones.
Muchas veces esas letras representan **variables**, es decir que se le puede asignar cualquier valor de un conjunto de números dado, otras veces, las letras representan un número fijo, denominadas **constantes.**

Nos referimos a **EXPRESIONES ALGEBRAICAS** cuando tenemos combinaciones de variables y constantes con las operaciones usuales.
Las expresiones algebraicas provienen de fórmulas físicas, geométricas, de economía, etc. Con ellas se puede operar para obtener otras relaciones.

$2x^2+7x-3$

$c_f = c + \frac{c.i.t.}{100}$

$\frac{1}{x-2}+3x^2$

$\sqrt{x+5}-3$

$v° + gt$

$\pi \cdot r^2 \cdot h$

Es decir en las expresiones algebraicas encontramos **variables** y **constantes**. La variable es una letra u otro símbolo que indica que se le puede asignar cualquier valor de un conjunto de números dados. Las constantes pueden estar expresadas como números o letras pero se usan para designar valores determinados que solamente representan un número fijo. Cuando usamos letras para indicar estos valores constantes indica que no están expresamente especificados.

En general, las letras cercanas al comienzo del alfabeto, como a, b, c, d, se emplean para representar los valores constantes. Las letras cercanas al final del alfabeto, como w, x, y y z, se utilizan para identificar a las variables. Así en la expresión

$$2x^2+7x-3$$

x representa la variable o incógnita, mientras que 2, 7 y – 3 representan las constantes.

Si tenemos

$$a\,x + b$$

a y b representan a las constantes y x es una variable.

También es importante saber calcular el valor que toma una expresión algebraica cuando a la variable se le da un valor determinado, el número obtenido se llama **valor numérico** de la expresión para dicho número.

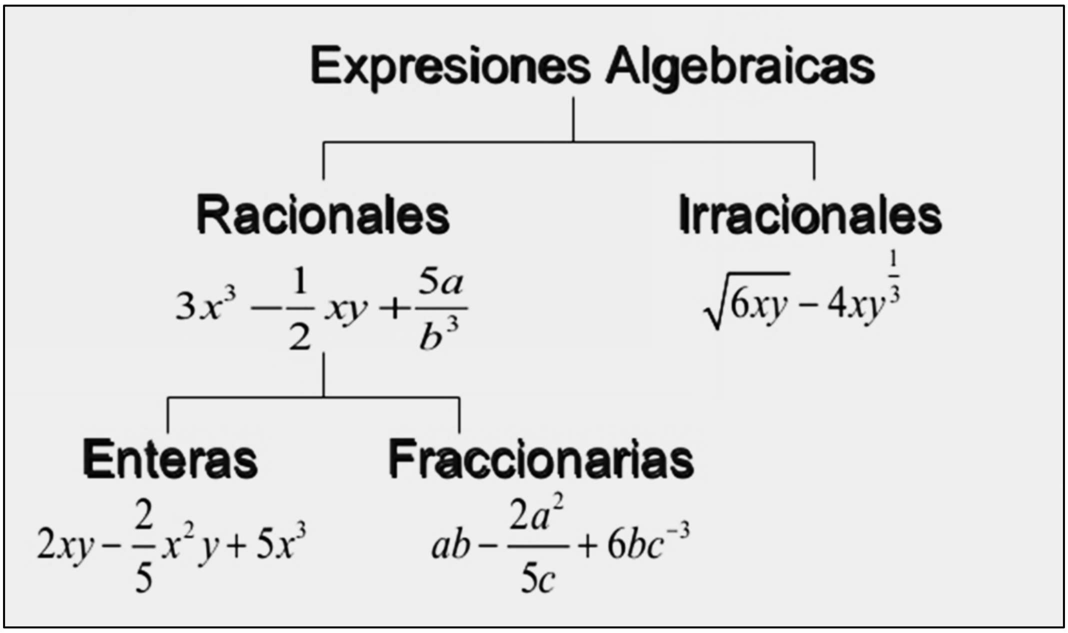
Si consideramos nuevamente la expresión

$$2\,x^2 + 7\,x - 3$$

y queremos especificar el valor numérico para $x = -2$ resulta

$$2\,(-2)^2 + 7\,(-2) - 3 = -9.$$

Según las operaciones involucradas en las expresiones algebraicas podemos clasificarlas



En las *EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS* las variables pueden estar afectadas únicamente por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potenciación con exponentes naturales incluyendo el cero, es decir exponentes enteros no negativos. Son expresiones del tipo:

$-2\,x^2 + x\,;$ $\quad a\,x + b;$ $\quad \sqrt{2}t^3 + 5t - 4\,;$ $\quad \frac{3}{5}x^2 - 4xy + 3y$

En cambio en las *EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS* algunas de las variables pueden estar elevadas a exponentes enteros negativos y entonces formar parte de algún denominador.

Por ejemplo:

$$4\,x^{-2} - 5\,x + 2; \qquad \frac{t+2}{t^2-1}; \qquad 5 - \frac{1}{y} + y$$

En las *EXPRESIONES ALGEBRAICAS IRRACIONALES* la variable, en algún caso, está elevada a exponente fraccionario (racional no entero).

$$\frac{\sqrt{t}+\sqrt{2}}{t}; \qquad z^{2/3} + z^{-1/2}; \qquad 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \qquad x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

7.2) MONOMIOS Y POLINOMIOS

Un **MONOMIO** es una expresión algebraica entera en la que no figuran operaciones de adición y sustracción (con un solo término) como en los siguientes casos

$-\frac{1}{5}\,x^3\,y^2$	$\pi\,r^2$	$-\,x^3\,y^2\,z$
$4.8.x$	$\sqrt{3}\,x$	e^2
	$5/4$	

Grado de monomio

El *grado del monomio* se obtiene mediante la suma de los exponentes de las variables. En nuestros ejemplos los grados correspondientes son respectivamente

5	2	6
1	1	0
	0	

Tipos de monomios: Semejantes y homogéneos

Monomios semejantes son aquellos que tienen idéntica parte variable

Ejemplos

$$-\frac{1}{5}\,x^3 \qquad \frac{2}{4}\,x^3 \qquad 0{,}2\,x^3 \qquad \sqrt{3}\,x^2.x$$

Monomios Homogéneos son aquellos que tienen igual grado

$$x^2\,y^4 \qquad 1/2\,x^6 \qquad 2\pi\,y^3\,x^3$$

Polinomios

La suma algebraica de dos o más polinomios se denomina *POLINOMIO.* Los monomios se consideran casos particulares de polinomios. A un polinomio de dos términos se lo denomina binomio, a uno de tres términos, trinomio.

Ejemplos:

$$2\,x + x^2 - x^3 \qquad \frac{1}{2}\,t^2 - 3 \qquad 2x^2\,y - y^2 \qquad x^5 - 2\,x^3 + 5\,x - 10$$

Los polinomios que nosotros estudiaremos son polinomios en una variable o indeterminada.

Grado de un polinomio
El grado de un polinomio es el mayor grado de los monomios que lo forman. En los ejemplos dados anteriormente sus grados son 3; 2; 3; 5 respectivamente. Un polinomio de grado cero corresponde sólo a una constante, es decir que todo número real puede ser pensado como un polinomio de grado cero. Por ejemplo:

$$-5 \qquad 5\,\pi \qquad -4{,}25 \qquad \sqrt{2}$$

En general un polinomio de grado n, con una única variable o indeterminada x se simboliza:

$$\mathbf{P(x) =} \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

$$\text{con} \quad \underbrace{a_j}_{coeficientes} \in \mathrm{R},\ j \in \mathbf{N}_0,\ a_n \neq 0$$

desarrollando la expresión queda:

$$\mathbf{P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_2\, x^2 + a_1\, x^1 + a_0\, x^0}$$

Coeficiente Principal
Denominamos coeficiente principal al coeficiente correspondiente al término de mayor grado. Se representa simbólicamente como a_n.

Por ejemplo, para los polinomios

$P(x) = 2\,x + x^2 - x^3$ $\qquad$ $Q(t) = 1/2\ t^2 - 3$

$R(y) = -5\,y - y^2$ $\qquad$ $S(x) = x^5 - 2\,x^3 + 5\,x - 10$

los coeficientes principales son 2, 1/2; -1 y 1 respectivamente.

Polinomios reducido o mónico
Cuando un polinomio tiene como coeficiente principal con valor uno se denomina mónico o reducido. Entre los ejemplos anteriores solamente S(x) es un polinomio mónico.

Polinomios iguales y opuestos
Dos polinomios de igual grado son iguales cuando son idénticos los coeficientes de los términos semejantes y son opuestos si los coeficientes de términos semejantes son opuestos.
Dados

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j.x^j \qquad \text{y} \qquad Q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j.x^j$$

resulta

$$P(x) = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad a_j = b_j$$
$$P(x) = -\,Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad a_j = -\,b_j$$

Ejemplos:
1- Calcule h, sabiendo que p (x) = 2 h x + 3 y q (x) = 8 x + 3 son iguales

Solución: Para que ambos sean iguales y como sólo hay dos términos, los coeficientes que acompañan a x deben ser iguales y ambos términos independientes deben coincidir. Esto último ya se cumple por lo tanto solo debe cumplirse que
$2\,h = 8$
de donde
$h = 4$
2- ¿Cuáles son los números m y n si $P(x) = 10\,x^2 - 8\,m\,x - 1$ es opuesto de $Q(x) = 3\,n\,x^2 - 40\,x + 1$?
Solución: Ambos polinomios son de grado dos por lo tanto para que sean opuesto basta con que los coeficientes de términos semejantes sea opuestos, es decir

$10 = -3n \quad \Rightarrow \quad n = -\frac{10}{3}$

$-8\,m = 40 \quad \Rightarrow \quad m = -5$

Valor Numérico o especialización de un Polinomio
Es el número que se obtiene al resolver las operaciones cuando se le asigna a la variable por un valor determinado $x = a$. Se simboliza P(a).
Si tenemos el polinomio

$$\mathbf{P(t) = -2\,t^2 + 3\,t - 1}$$

y consideramos, por ejemplo, $t = -2$, resulta

$$P(-2) = -2\,(-2)^2 + 3\,(-2) - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(-2) = -15}$$

Decimos que – 15 es el valor numérico de p(t) para t = - 2

Cuando el valor numérico del polinomio para $\boldsymbol{x = a}$ es igual a **0**, se dice que el valor ***a*** es **raíz o cero** del polinomio.

Ejemplo: Dado el polinomio $P(x) = x^2 + x - 6$, verificar que $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$ son raíces de P(x).
Solución:
$P(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$
$P(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 = 0$
Como P(2) = 0 y P(-3) = 0 decimos que 2 y -3 son raíces o ceros de P(x).

Más adelante veremos la utilización de estos conceptos para la factorización polinomios

IMPORTANTE
- Todo polinomio de grado n ($n \geq 1$) admite n raíces.
- Todo polinomio de grado n ($n \geq 1$) admite, a lo sumo, n raíces reales.

7.3) OPERACIONES CON POLINOMIOS

1) **ADICIÓN (**el resultado se denomina suma**)**
La suma de dos polinomios es otro polinomio cuyos términos son la suma de los monomios semejantes de ambos polinomios y los monomios no semejantes.
Ejemplo:
Determinar el polinomio suma de $P(x) = 6\,x^3 + 3\,x^2 + 8$ y de $Q(x) = -x^3 + x + 2$
Solución: Recurrimos a una *disposición práctica*, para obtener la suma, podemos completar y ordenar los polinomios:

$$\begin{array}{r}P(x) = 6x^3 + 3x^2 + 0x + 8 \\ Q(x) = -x^3 + 0x^2 + x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = 5x^3 + 3x^2 + x + 10\end{array}$$

2) SUSTRACCIÓN (el resultado se denomina diferencia o resta)
La diferencia entre P(x) y Q(x), *en ese orden*, es el polinomio que se obtiene sumando a P(x) el opuesto de Q(x). Es decir en símbolos:

$$P(x) – Q(x) = P(x) + [–Q(x)]$$

Ejemplo:
Consideremos los polinomios del ejemplo anterior y calculemos la diferencia entre p(x) y q (x)
Solución:

$$\begin{array}{r}P(x) = 6x^3 + 3x^2 + 0x + 8 \\ -Q(x) = x^3 - 0x^2 - x - 2 \\ \hline P(x) - Q(x) = 7x^3 + 3x^2 - x + 6\end{array}$$

3) MULTIPLICACIÓN (el resultado se denomina producto)
El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada término de uno de ellos por cada término del otro y luego sumando los términos semejantes, si los hubiera. En otras palabras, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Ejemplo: Sea de $P(x) = 6x^3 + 3x^2 + 8$ y $Q(x) = x – 2$

$$P(x).Q(x) = (6x^3 + 3x^2 + 8).(x – 2)$$
$$P(x).Q(x) = (6x^3 + 3x^2 + 8).x – (6x^3 + 3x^2 + 8).2$$
$$P(x).Q(x) = 6x^4 + 3x^3 + 8x – (12x^3 + 6x^2 + 16)$$
$$P(x).Q(x) = 6x^4 + 3x^3 + 8x – 12x^3 – 6x^2 – 16$$
$$\mathbf{P(x).Q(x) = 6x^4 – 9x^3 – 6x^2 + 8x – 16}$$

Analiza cómo se relaciona el grado del producto de dos polinomios con los grados de cada polinomio.

Productos especiales
Los productos de la siguiente tabla aparecen con tanta frecuencia que merecen atención especial; puedes comprobar la validez de cada fórmula efectuando las multiplicaciones correspondientes.

Producto	Ejemplo
Diferencia de cuadrados $(x + y) . (x - y) = x^2 – y^2$	$(2a + 3).(2a – 3) = (2a)^2 – 3^2 = 4a^2 – 9$
Cuadrado de binomio $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2 x.y + y^2$	$(2a – 3)^2 = (2a)^2 - 2.2a.3 + 3^2$ $4a^2 - 12a + 9$
Cubo de binomio $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$(2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3.(2a)^2.3 + 3.2a.3^2 + 3^3$ $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

4) División (el resultado se denomina cociente)

Si P(x) y Q(x) son polinomios tal que Q(x) no es *nulo*, entonces existen y son únicos dos polinomios C(x) y R(x) tales que:

$$\mathbf{P(x) = Q(x)\,.\,C(x) + R(x)}$$

y si $R(x) \neq 0$ entonces el grado de R(x) es menor que el grado de Q(x).

Decimos que:

p (x) es el <u>*dividendo*</u>
q (x) es el <u>divisor</u>
c (x) es el <u>*cociente*</u>
r (x) es el <u>*resto*</u>

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} r(x) & c(x) \end{array}$$

Para dividir polinomios debemos completar y ordenar en potencias decrecientes de la indeterminada *el dividendo* y ordenar el *divisor*

Ejemplo: Efectuemos la división entre $P(x) = 3x^5 - 2x^2 + 1$ y $Q(x) = 2 - x^2$

Si ordenamos y completamos el dividendo y al divisor lo ordenamos, el esquema nos queda:

$$
\begin{array}{llllllll|l}
 & 3x^5 & +0x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +0x & +1 & & -x^2+2 \\ \cline{9-9}
- & & & & & & & & \\
 & 3x^5 & & -6x^3 & & & & & -3x^3-6x+2 \\ \cline{2-4}
 & & & 6x^3 & -2x^2 & +0x & +1 & & \\
 & & - & & & & & & \\
 & & & 6x^3 & & -12x & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & -2x^2 & +12x & +1 & & \\ \cline{5-8}
 & & - & & & & & & \\
 & & & - & 2x^2 & & +4 & & \\
 & & & & & 12x & -3 & &
\end{array}
$$

C:A

$$\frac{3x^5}{-x^2} = -3x^3$$

$$\frac{6x^3}{-x^2} = -6x$$

$$\frac{-2x^2}{-x^2}$$

donde el cociente es

$$\mathbf{C(x) = -3x^3 - 6x + 2}$$

y el resto es

$$\mathbf{R(x) = 12x - 3}$$

Verifique que:

$$3x^5 - 2x^2 + 1 = (2 - x^2).(-3x^3 - 6x + 2) + (12x - 3)$$

Observaciones:

1. El grado del cociente es la diferencia entre el grado del dividendo y el del divisor
2. Si el resto es cero entonces la división es exacta, es decir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) \Rightarrow \mathbf{P(x) = Q(x)\,.\,C(x)}$$

P(x) es *divisible* por Q(x), o bien que Q(x) es *divisor* de P(x), se simboliza Q(x) | P(x) y se lee "Q(x) divide exactamente a P(x)".

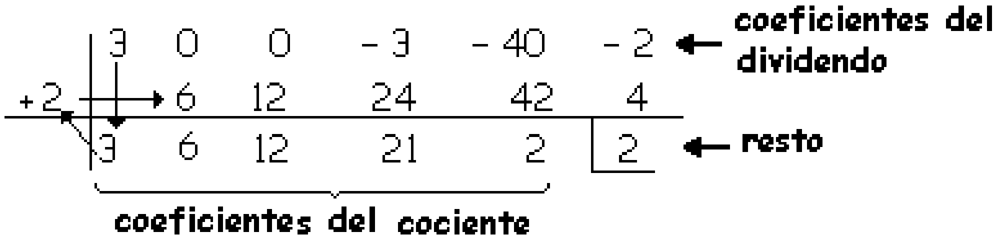
<u>Regla de Ruffini:</u> Divisiones donde el divisor es de la forma (***x*** – ***a***)
Es otro método para resolver una división cuando el divisor es exclusivamente de la forma (x - a) con a $\in$ **R.**
Este método permite obtener los coeficientes del cociente y el resto de la división.
Sea:

$$P(x) = 3x^5 - 3x^2 - 40x - 2 \quad \text{y} \quad Q(x) = x - 2$$

para aplicar este método necesariamente hay que completar y ordenar en forma decreciente el dividendo:

$$P(x) = 3\,x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 - 40x - 2$$

luego con los coeficientes del dividendo y el opuesto del término independiente del divisor (***a***) se construye la siguiente estructura:



De aquí pueden extraerse los coeficientes del polinomio cociente, que resulta un grado menor que el grado del dividendo y el resto de grado cero. Entonces:

$$\mathbf{C(x) = 3x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 21x + 2}$$
$$\text{y} \quad \mathbf{R(x) = 2}$$

<u>Teorema del resto</u>
Solamente es válido para divisiones donde el divisor es exclusivamente de la forma (x - a) con a $\in$ **R** y nos permite conocer el resto de la división sin efectuar la operación.
Para una división donde el divisor es (x – a) con a $\in$ **R** podemos escribir:

$$P(x) = (x - a).\,C(x) + R$$

si hallo el valor numérico del polinomio en el valor de x = a resulta:

$$P(a) = (a - a).C(a) + R$$
$$\mathbf{P(a) = R}$$

El resto de dividir un polinomio P(x) por un polinomio de la forma (x – a) es igual a P(a)

Además, como el resto es cero o su grado es menor que el grado del divisor, que en este caso es 1, resulta que dicho resto es un número real.
Ejemplo:
Sea $P(x) = 3\,x^5 - 3\,x^2 - 40\,x - 2$ y $Q(x) = x - 2$, que es el ejemplo utilizado anteriormente, si sólo deseo conocer el resto de la división calculo:

$$P(2) = 3.2^5 - 3.2^2 - 40.2 - 2 = \mathbf{2}$$

que es el valor ya obtenido por el método de Ruffini.

7.4) Ceros o raíces de un polinomio

Definimos **cero o raíz** de un polinomio P(x) a aquel valor de la variable ($x = \mathbf{x_1}$) que hace cero el valor numérico del polinomio. En símbolos:

$$\mathbf{P(x_1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 \text{ es raíz}}$$

Pero si $P(\mathbf{x_1}) = 0$, por el *Teorema del Resto*, sabemos que el resto de dividir P(x) por $(x - \mathbf{x_1})$ es cero. Decimos que $Q(x) = x - \mathbf{x_1}$ es **divisor** de P(x) y entonces P(x) se puede escribir como:

$$\mathbf{P(x) = C(x).(x - x_1)}$$

Por lo tanto el conocimiento de una raíz del polinomio permitió escribirlo como el producto de otros dos, esto se denomina "***factorización del polinomio***".

Todo polinomio de grado n, con $n \geq 1$, admite n raíces y puede tener a lo sumo n raíces reales. Encontrar las raíces de un polinomio de grado uno o de grado dos es relativamente sencillo. Cuando necesitamos encontrar raíces de un polinomio de grado tres o más debemos recurrir al **TEOREMA de GAUSS** que expresa lo siguiente:

Si P(x) es un polinomio de grado n ($n \geq 1$), con coeficientes enteros, término independiente no nulo y admite al menos una raíz racional **a/b** (con a y b coprimos), entonces se verifica que: **a es divisor del término independiente** **b es divisor del coeficiente principal**

Ejemplo: Sea $p(x) = 9x^3 - 12x^2 - 9x + 12$, hallar sus raíces racionales.
Solución:
Los divisores de 12 (a) son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12
Los divisores de 9 (b) son: 1, 3 y 9

Luego las **posibles raíces racionales** (a/b) son: **1, 2, 3, 4, 6, 1/3, 1/9, 2/3; .... y sus opuestos**.

Sabemos que en este caso a lo sumo existen 3 raíces reales, para encontrarlas entre todas las posibles mencionadas comenzamos a probar, hasta detectar el valor de una de ellas.

Verificamos que $P(1) = 0$, luego por el teorema del resto sabemos que $(x - 1)$ es divisor de P(x). Aplicando la regla de Ruffini encontramos el polinomio cociente de dividir P(x) por $(x - 1)$.
Por lo tanto

$$P(x) = (x - 1).(9x^2 - 3x - 12)$$

Ahora continuamos buscando las raíces de $9x^2 - 3x - 12$, reiterando el procedimiento.

Recordemos que encontrar las raíces de un polinomio nos permite conocer los divisores del polinomio y con ellos podemos factorizarlos.

Raíces simples y raíces múltiples

Cuando un polinomio tiene una raíz $\mathbf{x_1}$, sabemos que $(x - \mathbf{x_1})$ es divisor del polinomio. Cuando efectuamos la división empleando la Regla de Ruffini, si sólo podemos dividir una sola vez por dicho divisor, decimos que $\mathbf{x_1}$ es una **raíz simple.**
En cambio, si podemos dividir sucesivamente varias veces por el mismo divisor decimos que tiene **raíz múltiple (doble, triple, etc).**

El **orden de la multiplicidad** surge del número de divisiones sucesivas exactas que se pueden efectuar con el mismo divisor.

Ejemplos

1. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ un polinomio que tiene como raíces $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ y $x_3 = -3$. Estas son raíces simples pues sólo se puede dividir una única vez por $(x - 2)$, por $(x + 2)$ y por $(x + 3)$. Realicen la verificación correspondiente.

2. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ comprobamos que una raíz es $x_1 = -1$.

$$P(-1) = (-1)^3 - 3.(-1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow Q(x) = x + 1 \text{ es divisor de } P(x)$$

Aplicando la Regla de Ruffini verificamos que sólo se puede dividir una vez por $(x + 1)$, pues cuando efectuamos la segunda división el resto es distinto de cero. Por lo tanto -1 es una raíz simple.

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
	1	-4	4	0 = R
-1		-1	5	
	1	-5	9 = R	

Trabajando con el cociente que resulta de la primer división $(x^2 - 4x + 4)$ y probamos que $x_2 = 2$ es raíz ya que:

$$2^2 - 4.2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2) \text{ es divisor de } P(x)$$

Aplicando la Regla de Ruffini verificamos que se puede dividir dos veces por $(x - 2)$. Se puede trabajar con el cociente que resulto de la primer división o con el polinomio original. En este caso concluimos que 2 es raíz con multiplicidad de orden 2 (o bien que es raíz doble).

	1	-4	4
2		2	-4
	1	-2	0 = R
2		2	
	1	0 = R	

7.5) Factorización de un polinomio en una variable

Definición:

Factorizar un polinomio es escribir dicho polinomio como producto de factores primos.

Para ello es necesario definir polinomio primo o irreducible…

Definición:

Un polinomio P(x), de grado mayor que cero, es primo o irreducible si y sólo sí todas las descomposiciones de la forma P(x) = Q(x).C(x) son tales alguno de sus factores es de grado cero.

Ejemplos:

1- $P(x) = 7x - 3$ $\quad P(x) = 7(x - 3/7)$ $\quad P(x) = 3(7/3x - 1)$

P(x) es **primo o irreducible** por cuanto en todos los casos alguno de sus factores es de grado cero.

2- $P(x) = x^2 - 4x$ no es primo por cuanto se puede expresar

$$P(x) = x\,(x - 4)$$

y ninguno de sus factores es de grado cero.

Factorización de Polinomio conociendo sus raíces

Si un polinomio $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ con $a_n \neq 0$, tiene n raíces reales $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, se expresa como producto de su coeficiente principal por los factores primos mónicos de la forma $(x - x_j)$, es decir:

$$\mathbf{P(x) = a_n.(x - x_1).(x - x_2)\ ...\ (x - x_{n-1}).(x - x_n)}$$

Ejemplo:

1- Sea $P(x) = 9x^3 - 12x^2 - 9x + 12$ un polinomio de grado tres, cuyas raíces son $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ y $x_3 = 4/3$, expresado como producto de polinomios primos resulta:

$$P(x) = 9x^3 - 12x^2 - 9x + 12 = 9(x-1)(x+1)(x-4/3)$$

2- Sea un polinomio que tiene una raíz simple en $x_1 = -1$, una raíz doble en $x_2 = 2$ y su coeficiente principal es -1, factorizado resulta:

$$P(x) = -1(x+1)(x-2)^2$$

Al desarrollarlo se obtiene:

$$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$$

Algo más sobre Factorización de Polinomio

En algunos polinomios especiales, es posible encontrar su forma factorizada utilizando otros caminos más cortos. Veamos algunos

- **Factor común:** Si el polinomio tiene término independiente cero, entonces p(0) =0, luego cero es raíz del polinomio y todos lo término tienen x, se puede sacar factor común x ,con el menor exponente.
  $P(x) = x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$, en este caso, cero es raíz doble

- **Trinomio cuadrado perfecto:** Cuando tenemos un polinomio de grado dos y están los tres términos, podemos verificar si corresponden al desarrollo de un cuadrado de binomio.
  $a^2 + 2.a.b + b^2 = (a+b)^2$
  $P(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x+1)^2$

- **Diferencia de cuadrados:** Es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases
  $P(x) = x^4 - 16 = x^4 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

7.6) Expresiones algebraicas fraccionarias

Sean

$$\frac{x^3}{81-x^2} \text{ con } |x| \neq 9 \qquad \text{y} \qquad \frac{2x-3}{5x-1} \text{ con } x \neq \frac{1}{5}$$

A expresiones algebraicas de esta naturaleza se las denomina EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS.

Definición:

Una EXPRESIÓN ALGEBRAICA RACIONAL NO ENTERA O FRACCIONARIA es el cociente indicado de dos polinomios, si el del denominador no es el polinomio nulo (0) y no es de grado 0 (número real distinto de cero).

O sea

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ con } Q(x) \neq 0 \wedge gr(Q(x)) \neq 0$$

Operaciones

1. **Simplificación:**

Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una expresión fraccionaria donde

$$P(x) = P_1(x).H(x) \quad \text{y} \quad Q(x) = Q_1(x).H(x)$$

entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x).H(x)}{Q_1(x).H(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

para valores de x que no anulen Q(x).

Ejemplo:

Simplificamos la expresión:

$$\frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x} \text{ con } x \neq 0 \text{ y } x \neq 6$$

$$\frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x} = \frac{(x+6)(x-6)}{3x(x-6)}$$

$$\frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x} = \frac{x+6}{3x}$$

Para la expresión simplificada hay que tener presente no solamente que $x \neq 0$ sino también que $x \neq 6$; entonces la simplificación es:

$$\frac{x+6}{3x} \text{ con } x \neq 0 \text{ y } x \neq 6$$

Mínimo común múltiplo de polinomios (mcm)

Sea un conjunto de dos o más polinomios y tal que cada uno se halla expresado como producto de factores primos o irreducibles, decimos que el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO entre ellos es el producto de los factores primos comunes y no comunes considerados con su mayor exponente.

Ejemplo:

Calculamos el mínimo común múltiplo entre: $x^2 – 9$, $x^2 + 6x + 9$ y $x + 3$.

Al factorear resulta:

$$x^2 – 9 = (x + 3)(x – 3)$$
$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$
$$x + 3 \text{ es primo}$$

Entonces el mcm es $(x + 3)^2(x – 3)$.

2. Adición y sustracción:

Sea

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2-x} - \frac{1}{x} \text{ con } x \notin \{0;1\}$$

determinamos el mcm entre los polinomios denominadores x – 1 es primo

$x^2 - x = x(x - 1)$

x es primo

entonces el mcm es x(x – 1).

Se efectúa la operación de forma análoga a la adición y sustracción entre números racionales, así se obtiene:

$$\frac{3}{x-1}+\frac{4x-3}{x^2-x}-\frac{1}{x}=\frac{3x+4x-3-(x-1)}{x(x-1)}=\frac{6x-2}{x(x-1)}$$

3. Multiplicación:

Se procede de forma análoga a la multiplicación de números racionales.

Sea, por ejemplo:

$$\frac{x^4-1}{x^2+6x+9}.\frac{x^2+3x}{x^2+1}=\frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+3)^2}.\frac{x(x+3)}{(x+1)(x-1)}.\frac{1}{(x^2+1)}=\frac{x}{x+3}$$

con $x \notin \{1,-1,-3\}$

4. División:

Previamente definimos expresión recíproca de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, a $\frac{Q(x)}{P(x)}$ para valores de x que no anulen P(x) ni Q(x).

Luego:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{S(x)}{R(x)}, R(x)\neq 0, S(x)\neq 0$$

Serie de problemas Nº 6

1) Escribir la **expresión algebraica** correspondiente a los siguientes enunciados:
    a. El doble del resultado de sumarle a un número entero su siguiente
    b. El triple del resultado de sumar un número con su inverso
    c. El doble de la edad que tendré dentro de cinco años
    d. La mitad del resultado de sumarle 3 a un número
    e. El cuadrado de la suma de dos números enteros consecutivos
    f. La media de un número y su cuádruplo
    g. La cuarta parte de un número entero más el cuadrado de su siguiente
    h. El doble de la edad que tenía hace 7 años
    i. La suma de un número con el doble de otro
    j. La suma de tres números pares consecutivos

2) Complete el siguiente cuadro:

polinomio	grado	coeficiente principal	¿Es reducido o mónico?	¿Está completo?	término independiente
$3x^2 – 4x + 1$					
$-t^3 + t^2 – 4t – 4$					
$r^2(12 – 3r^2)$					
$7y^2 + 6^{1/3}y$					
$–4$					
$1 – z$					

3) Calcule h sabiendo que los polinomios $P(x) = 2x^3 + (h – 1) x^2 – 3$ y $Q(x) = 2x^3 – 7x^2 – 3$ son iguales.

4) Determine los valores reales de a, b, α y β para que el polinomio $P(x) = x^3 + 6x^2 +15x +14$ sea igual al polinomio $Q(x) = a (x + \alpha)^3 + b (x + \beta)$.

5) Calcule h y k si se sabe que los polinomios $P(x) = 3x^2 + 2 hx – (3k + 2)$ y $Q(x) = -3x^2+ 5x + h + k$ son opuestos.

6) Dados los polinomios $P(x) = x^2 – 4x + 4$ y $Q(x) = 2x – 4$, calcule:
    a. $P(x) + Q(x)$
    b. $P(x) – 2Q(x)$
    c. $3P(x) . Q(x)$
    d. $P(x) : Q(x)$ (con $x \neq 2$)
    e. $[P(x)]^2$
    f. $[Q(x)]^3$

7) Indique por cuales de los siguientes polinomios es divisible $P(x) = 2x^3– 3x^2 – 2x + 3$
    a) $2x – 3$ b) $2x + 3$ c) $x + 1$ d) $x – 1$

8) Determine los números opuestos h y k para que $P(x) = x^3 - x^2 + hx - k$ sea divisible por $Q(x) = x + 2$

9) ¿Cuál es el resto de dividir $P(x) = 3x^2 + 2x - 4$ por $Q(x) = x + 1$?

10) ¿Cuál es el resto de dividir $P(t) = t^2 - 7t + 6$ por $Q(t) = t - 1$? ¿Es P(t) divisible por Q(t)? ¿Es $t = 1$ raíz de Q(t)?

11) Determine el valor positivo de α para que $P(x) = (\alpha - 1)x^3 - \alpha^2 x^2 + x - 10$ tenga a -2 como raíz.

12) En una división de polinomios es el divisor $2x^2 + x + 5$, el cociente $x^2 + 4$ y el resto $x + 6$. Halle el polinomio dividendo.

13) Halle el orden de multiplicidad de las raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ en $P(x) = x^6 + x^5 - 5x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x$

14) Halle el polinomio P(x) de grado mínimo y tal que:
   (a) Es reducido, tiene raíces simples en -1 y 3, y tiene una raíz doble 6.
   (b) Tiene raíces simples en 2 y -2, y $P(-1) = 3$.

15) Encuentre la forma factoreada de los siguientes polinomios
   (a) $P(x)= x^3 - 4x^2 + x + 6$
   (b) $P(x)= x^5 + 1$
   (c) $P(x) = -24x^3 - 8x^2 + 6x + 2$
   (d) $P(x) = 81x^4 - 16$
   (e) $P(x) = x^2 - 6x + 9$
   (f) $P(x) = x^4 - x^2$
   (g) $P(x) = 4 x^7 + 4x$

16) Escribir un polinomio de grado tres que tenga por raíces 2, -1 y ½. ¿Es único?

17) Mostrar que 1 es raíz triple de $P(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$ y halle otra raíz.

18) Factoree el polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

19) Determine el valor real de a, para que el resto de la división entre: $P(x) = x^4 + 2x^2 - (a - 1)^2 x + 1$ y $Q(x) = x + 1$ (en ese orden) sea igual a 11.

20) Determine para qué valores reales y no nulos de m y n el polinomio P(x) es divisible por el polinomio Q(x), si:
$P(x) = mx^3 + 2mx^2 - nx^2 + (3m + 4n^2)x - m - n$ y $Q(x) = x^2 - x$

21) Simplifique las siguientes expresiones:
   a) $\dfrac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 49}$, $|x| \neq 7$
   b) $\dfrac{y^3 - 1}{y - 1}$, $y \neq 1$

c) $\dfrac{a^3 + a^2 + a + 1}{a^2 + a}$, $a \neq 0 \wedge a \neq -1$

d) $\dfrac{\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[4]{a^4}}{\sqrt[3]{a^3}}$, $a \neq 0$

e) $\dfrac{\sqrt[5]{\left(a^2 - 4\right)^5} - \sqrt{\left(a^2 - 4\right)^2}}{a^2 - 4}$, si $|a| \neq 2$

f) $\dfrac{t^4 - t^3 - t^2 + t}{t^2 + 1 - 2t}$

g) $\dfrac{s^3 - 8}{2s^2 - 8s + 8}$

22) Halle el mcm entre los siguientes polinomios:

a) $x^3 + x^2$; x; $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $x^3 + 2x^2 + x$; $x^4 - x^2$; $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

c) $x^2 - 1$; $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

23) Resuelva e identifique para qué valores de la variable es válida la operación:

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

b) $\left[-4 + \dfrac{1}{y^2}\right] : \left[2 + \dfrac{1}{y}\right]$

c) $\left[\dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{z-1}\right] : \dfrac{1}{z^2 - 1}$

d) $\left[2 - \dfrac{2}{z-1}\right] : \left[\dfrac{z^2 - 4z + 4}{z^2 - z}\right]$

e) $\dfrac{x-3}{4x} : \dfrac{x^2 - 9}{8x + 16x^2}$

f) $\dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 4x} : \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 3x}$

Unidad 7: "Otras ecuaciones y sistemas"

Llamemos $f(x)$ y $g(x)$ a dos expresiones algebraicas en la variable x. Una escritura del tipo:

$$f(x) = g(x) \quad \text{que es lo mismo que} \quad f(x) - g(x) = 0$$

es una ***ecuación*** en la variable x, la cual recibe el nombre de ***incógnita***. Si se reemplaza el signo igual por un signo mayor, menor, mayor o igual o menor o igual se trata de una ***inecuación***.

Un elemento del conjunto **A** que satisface la igualdad es una solución o raíz de la ecuación. Resolver una ecuación en el conjunto **A** significa examinar si la misma tiene o no soluciones en **A.** Si no tiene, diciendo "no tiene soluciones en **A**" se considera resuelta. Si tiene, hay que **hallar todas las soluciones**. Naturalmente, puede ocurrir que todo elemento de **A** sea solución de la ecuación, por lo que $f(x)$ y $g(x)$ serían la misma expresión algebraica, y en tal caso la igualdad sería una **identidad**.

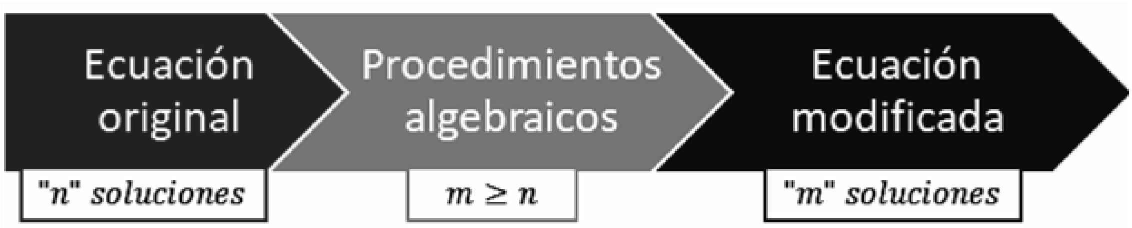
Por lo dicho, la existencia de soluciones de una ecuación depende del conjunto **A** en el que está permitido especificar x. Por ejemplo, la ecuación $x + 3 = 0$ no tiene solución en **N** porque para todo $x \in \mathbf{N}$ resulta $x + 3 \neq 0$. Sin embargo, ampliando el conjunto A donde puede especificarse la x, y precisamente poniendo **A** = **Z**, la ecuación tiene la solución $x = -3$.

Salvo que se diga lo contrario, en este curso supondremos que el conjunto **A** donde se buscan las eventuales soluciones de una ecuación es el conjunto de los **números reales**. Nos referiremos a este hecho al decir "resolver la ecuación en **R**".

En esencia, el método de resolución de las ecuaciones de este capítulo consiste en aplicar distintas propiedades para lograr ***transformarlas en ecuaciones polinómicas***, que ya sabemos resolver.

Este procedimiento presenta dos inconvenientes, ya que puede ocurrir que:

- Para la raíz $x = x_1$ de la ecuación polinómica no está definido $f(x_1)$ o $g(x_1)$. Esto se debe a que no se puede dividir por cero ni calcular una raíz de índice par de un número negativo o un logaritmo de un número no positivo en **R**.
- Para la raíz $x = x_1$ de la ecuación polinómica están definidos $f(x_1)$ y $g(x_1)$ pero resulta que $f(x_1) \neq g(x_1)$. Se dice que $x = x_1$ es una **solución extraña** de la ecuación.



Por este motivo, una vez resuelta la ecuación polinómica es necesario **verificar si para cada solución se verifica la ecuación original**. En caso contrario se **descartarán las soluciones que no la verifican**.

2.1) Ecuaciones e inecuaciones racionales

Una **ecuación racional** es una expresión del tipo:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0$$

Donde $N(x)$ y $D(x)$ son dos polinomios en la variable $\boldsymbol{x}$ y cuya solución está formada por todos los valores para los cuales:

$$\boldsymbol{N(x) = 0} \quad \text{siempre que sea} \quad \boldsymbol{D(x) \neq 0}$$

Las ecuaciones racionales no siempre están expresadas en forma implícita (igualadas a cero), para lo cual se requiere convertirla en ese formato para hallar ***N(x)*** y sus raíces.

Veamos un ejemplo…

Resolver la ecuación: $\dfrac{x}{x^2-3x+2}+\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$

Convertimos en su forma implícita por pasaje de términos

$$\frac{x}{x^2-3x+2}+\frac{4}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=0$$

Factorizamos los denominadores

$$\frac{x}{(x-2)(x-1)}+\frac{4}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x-1}=0$$

Desarrollamos la suma y la resta utilizando como denominador común el MCM

$$\frac{x(x+1)+4(x-2)-(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}=0$$

Igualamos a cero el numerador

$$x(x+1)+4(x-2)-(x-2)(x+1)=0$$

Desarrollando por propiedad distributiva

$$x^2+5x-8-x^2+x+2=0$$

Agrupando términos semejantes

$$6x-6=0$$

Despejando

***x* = 1**

Al reemplazar en la ecuación original vemos que no está definida, por lo tanto:

S = Ø

Una **inecuación racional** es una expresión de cualquiera de las siguientes:

$$\frac{N(x)}{D(x)}<0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)}\leq 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)}>0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)}\geq 0$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios en la variable $\boldsymbol{x}$. Si ambos son de primer grado se puede resolver fácilmente por aplicación de la regla de los signos de la multiplicación y división como ya hemos visto. Si alguno de ellos es de segundo grado o mayor esta técnica es muy tediosa, razón por la cual vamos a recurrir al **método del análisis de los signos de los factores**.

Veamos un ejemplo…

Hallar el conjunto solución de la inecuación: $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 + 7x + 10} > 0$

Para poder aplicar este método es necesario factorizar completamente el numerador y el denominador, es decir expresarlos como el producto de **factores primos**. Realizando esto (verificarlo):

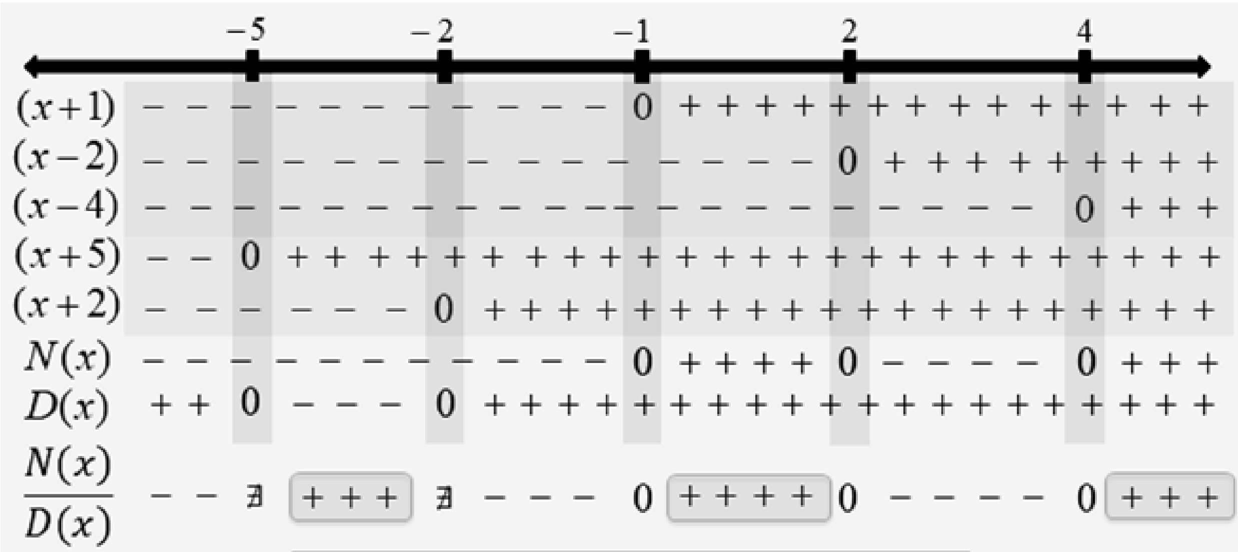
$\dfrac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(x+5)(x+2)} > 0$

Se hallan los ceros de cada uno de los factores

-1, 2 y 4 son los del numerador

-5 y -2 son los de denominador

Luego se dibuja una tabla a partir de una recta numérica donde se ubican estos ceros. Debajo de la misma, en cada fila se indican los signos de cada factor para los valores de x de la recta numérica. Finalmente se combinan los signos por la regla de los signos de la multiplicación y la división para hallar el signo del denominador y del numerador y por ultimo del cociente.



$\boldsymbol{S = \{(-5;-2) \cup (-1;2) \cup (4;+\infty)\}}$

2.2) Ecuaciones irracionales

Si en una ecuación la incógnita aparece bajo el signo de una raíz (cuadrada, cúbica, etc) se habla de una ecuación irracional. No olvide que una potencia de exponente racional puede representar una raíz.

Son ejemplos de este tipo de ecuaciones…

$$\sqrt{x+1} = 3 \qquad \sqrt{2x-5} - 2 = \sqrt{x-1} \qquad x + 2 = x^{2/3}$$

¿Cómo encontramos la solución de estas ecuaciones?

Siguiendo el siguiente procedimiento:

1. *Elevar ambos miembros al índice de la raíz*
2. *Desarrollar las potencias*

3. *Si quedan raíces repetir el paso anterior*
4. *Si ya no quedan raíces resolver la ecuación resultante*
5. *Verificar las soluciones*

Veamos un ejemplo…
Resolver la ecuación: $\sqrt{2x-2}+1=\sqrt{4x-3}$
$\left(\sqrt{2x-2}+1\right)^2=\left(\sqrt{4x-3}\right)^2$
$(2x-2)+2\sqrt{2x-2}+1=4x-3$
$2x-1+2\sqrt{2x-2}=4x-3$
$2\sqrt{2x-2}=2x-2$
$\sqrt{2x-2}=x-1$
$\left(\sqrt{2x-2}\right)^2=(x-1)^2$
$x-2=x^2-2x+1$
$x^2-4x+3=0$
x_1 = 1 y x_2 = 3
Ambas verifican la ecuación original, por lo tanto:
***S* = {1;3}**

<u>2.3) Método del cambio de variable</u>
El cambio de variable es una técnica que nos permite pasar de una ecuación complicada a otra más sencilla.
Los cambios de variable más frecuentes se suelen dar en:
- *Ecuaciones policuadráticas (como el caso de la bicuadrada)*
- *Ecuaciones exponenciales*
- *Ecuaciones logarítmicas*
- *Ecuaciones donde la variable posee todos sus exponentes negativos*

En general, aplicaremos este método en **cualquier ecuación donde la variable está sometida a las mismas operaciones y luego elevada a distintos exponentes naturales.**

Tomemos el siguiente ejemplo para ilustrar…
Considere la ecuación:
$$ax^4+bx^2+c=0$$

Por propiedades de la potencia se puede reescribir así:

$$a(x^2)^2+bx^2+c=0$$

Donde se observa que la **operación común** a la que está sometida la variable es el cuadrado. Por ello es conveniente definir a la **variable nueva** (y se le asigna una **letra distinta**) como:

$$y\equiv x^2$$
se lee "y es por definición igual a x^2"

Por lo tanto realizando la sustitución por la variable nueva queda:

$$ay^2+by+c=0$$

Resultando una ecuación cuadrática, cuyas soluciones $\boldsymbol{y_1}$ e $\boldsymbol{y_2}$ se obtienen con la fórmula resolvente. Sin embargo, es el objetivo del problema hallar los valores de x. ¿Cómo se hace esto? Es muy simple, se reemplazan los valores de ***y*** en la ecuación que definió esta variable y se resuelven para hallar los valores correspondientes de la variable ***x***.

En resumen, lo pasos a seguir son:

- *Reconocer en la ecuación la o las operaciones comunes que afectan a la variable*
- *Asignar una letra nueva para definir como nueva variable a la variable original afectada por la o las operaciones comunes*
- *Volver a escribir la ecuación sustituyendo por la nueva variable*
- *Resolver la ecuación en la variable nueva*
- *Convertir los valores de la variable nueva en la variable original utilizando el cambio de variable definido*

Veamos un ejemplo…

Resolver la ecuación:

$$\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$$

Cambiando la variable: $\boldsymbol{y \equiv log_5 x}$

$$y + \frac{3}{y} = \frac{7}{2}$$

$$2y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$y_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \log_5 x \Rightarrow x_1 = 5\sqrt{5}$$

$$y_2 = 2 \Rightarrow 2 = \log_5 x \Rightarrow x_2 = 25$$

Por lo tanto:

$\boldsymbol{S = \{5\sqrt{5}; 25\}}$

2.4) Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones **polinómicas de primer grado que tienen más de una incógnita**. Las incógnitas aparecen en varias de las ecuaciones, pero no necesariamente en todas. Lo que hacen estas ecuaciones es **relacionar las incógnitas entre sí**. Para resolver un sistema, se dispone de varios métodos. En este curso trabajaremos solo con sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (se dice sistemas de 2 x 2) y para su resolución usaremos los siguientes métodos: el de **reducción**, el de **igualación** y el de **sustitución**.

METODO DE REDUCCION

Consiste en operar con las ecuaciones como, por ejemplo, sumar o restar ambas ecuaciones, de modo que una de las incógnitas desaparezca. Así obtenemos una ecuación con una sola incógnita.

Veamos un ejemplo…

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Para sumar las ecuaciones y que desaparezca una de las dos incógnitas, los coeficientes de dicha incógnita deben ser iguales pero de signo distinto.

Para ello, multiplicamos por -2 la primera ecuación. Después, sumamos las ecuaciones y resolvemos la ecuación obtenida:

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 0$$

$$\downarrow$$

$$-2x - 2y = -6$$
$$2x - y = 0$$
$$- - - - - - - - -$$
$$0x - 3y = -6$$

$$\downarrow$$

$$-3y = -6$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{-6}{-3} = 2$$

Finalmente, sustituimos el valor de *y = 2* en la primera ecuación y la resolvemos:

$$x + y = 3 \quad \rightarrow$$

$$x + 2 = 3 \quad \rightarrow$$

$$x = 3 - 2 = 1$$

Por tanto, la solución del sistema de ecuaciones es:

S = (1 ; 2)

METODO DE IGUALACION

Consiste en despejar de en ambas ecuaciones la misma incógnita para poder igualar las expresiones, obteniendo así una sola ecuación con una incógnita.

Veamos un ejemplo…

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x - \frac{y}{2} = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

Despejamos en ambas ecuaciones la *y (podría ser la x si se quisiera)*

$$5x - \frac{y}{2} = -1 \quad \rightarrow$$

$$-\frac{y}{2} = -1 - 5x \quad \rightarrow$$

$$y = -2(-1 - 5x) = 2 + 10x$$

$3x - 2y = 1 \quad \rightarrow$

$-2y = 1 - 3x \quad \rightarrow$

$y = \frac{1 - 3x}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

Igualamos las expresiones y resolvemos la ecuación:

$2 + 10x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x \qquad \rightarrow$

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 10x = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2}x \rightarrow$

$4 + 20x = -1 + 3x \qquad \rightarrow$

$17x = -5 \qquad \rightarrow$

$x = -\frac{5}{17}$

Sustituyendo *x* en la primera de las ecuaciones anteriores obtenemos *y*:

$y = 2 + 10x =$

$= 2 + 10\left(-\frac{5}{17}\right) =$

$= 2 - \frac{50}{17} = -\frac{16}{17}$

S = (-5/17 ; -16/17)

METODO DE SUSTITUCION

Consiste en despejar una de las incógnitas (a elección) y sustituir su expresión en la otra ecuación. De este modo, obtendremos una ecuación de primer grado con la otra incógnita. Una vez resuelta, obtenemos el valor de la otra variable sustituyendo en la ecuación ya despejada.

Veamos un ejemplo…

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} -10x - 5y = 0 \\ \;\; 21x - 7y = 28 \end{cases}$$

Despejamos en la primera ecuación la *y*:

$-10x - 5y = 0 \quad \rightarrow$

$-5y = 10x \quad \rightarrow$

$y = \frac{10}{-5}x = -2x$

Sustituimos su expresión en la segunda ecuación y la resolvemos:

$21x - 7y = 28 \quad \rightarrow$

$21x - 7(-2x) = 28 \quad \rightarrow$

$21x + 14x = 28 \quad \rightarrow$

$35x = 28 \quad \rightarrow$

$$x = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$$

Calculamos *y* sabiendo *x*:

$$y = -2x = -2\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{5}$$

Por tanto, la solución del sistema de ecuaciones es:

S = (4/5 ; -8/5)

2.5) Sistemas de ecuaciones mixtos

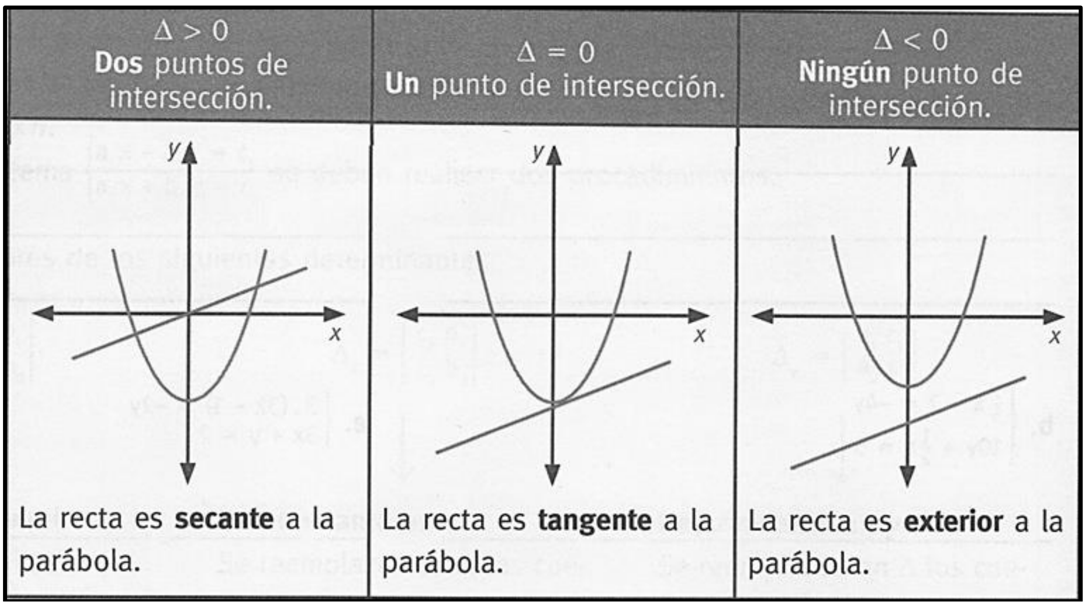
Los sistemas de ecuaciones mixtos pueden estar formado por **una recta y una parábola**, o bien, por **dos parábolas**.

Resolver un sistema mixto puede involucrar dos tareas:

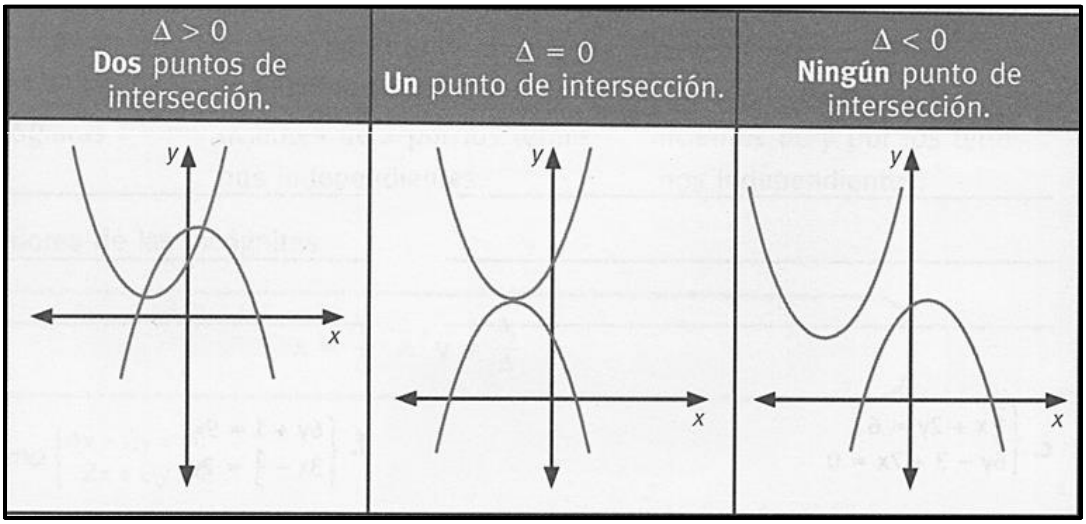
- **Resolverlo analíticamente**: esto es, encontrar los valores de las incógnitas que verifican simultáneamente las ecuaciones del sistema.
- **Resolverlo gráficamente**: esto es, encontrar los puntos de intersección de ambas gráficas. Además, a través de la resolución gráfica se puede ***verificar la resolución analítica***.

Se puede reconocer cuántas soluciones tiene el mismo **analizando el discriminante** de la ecuación cuadrática que surge al resolver el sistema por el método de igualación o sustitución.

Si el sistema está formado por **una recta y una parábola**:



Si el sistema está formado por dos parábolas



Para resolver analíticamente este tipo de sistema, se utilizan los métodos ya conocidos, eligiendo el más conveniente. Tenga en cuenta que siempre al menos una de las ecuaciones es de segundo grado. Cabe destacar que, en ocasiones, puede ser necesario ***realizar un cambio de variable para que el sistema adquiera el formato de sistema mixto***.

Veamos un ejemplo…

Resolver gráfica y analíticamente el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Conviene usar el método de igualación

$x^2 - 2 = 2x + 1$

Reordenando

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Calculo el discriminante

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16 > 0$

Entonces tiene **dos puntos de intersección**

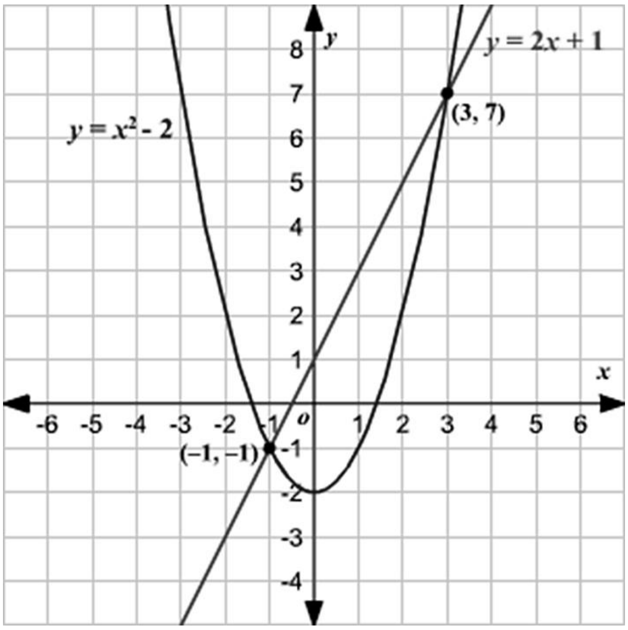
Uso la fórmula resolvente (verifíquelo)

$\boldsymbol{x_1 = -1}$ **y** $\boldsymbol{x_2 = 3}$

Reemplazando en la segunda ecuación

$\boldsymbol{y_1 = 2.(-1) + 1 = -1}$

$\boldsymbol{y_2 = 2.3 + 1 = 7}$



El conjunto solución es:

***S* = {(-1,-1);(3,7)}**

Serie de problemas Nº 7

1) Resolver las siguientes ecuaciones. En todos los casos verificar el conjunto solución (corrección de los procesos de cálculo y ausencia de soluciones "extrañas") reemplazando cada integrante de ese conjunto en la ecuación dada.
   a.- $\dfrac{x^2 - 3x - 40}{x + 2} = 0$
   b.- $\dfrac{2x^2 + 4x + 6}{-21 + 4x + x^2} = 0$
   c.- $\dfrac{x - x^2}{x^2 - 3} + 5 = \dfrac{3x}{2x^2 - 6}$
   d.- $4 - \dfrac{2}{1 + x} = \dfrac{2}{x^2 + 1} + 2x$

2) Ahora en los cuatro ejercicios cambie el signo igual según se indica y resuelva las inecuaciones resultantes:
   a.- En 1-a, por mayor
   b.- En 1-b, por mayor o igual
   c.- En 1-c, por menor
   d.- En 1-d, por menor o igual

3) Resuelva la siguiente inecuación en **R** y luego:
$$\frac{5 - x}{x} \leq 2$$
   a.- Expresar por extensión los números enteros que la satisfacen
   b.- Expresar por extensión los números naturales que la satisfacen

4) Resuelva la siguiente inecuación en **R** y luego:
$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} \leq 0$$
   a.- Expresar por extensión los números enteros que la satisfacen
   b.- Expresar por extensión los números naturales que la satisfacen

5) Resuelva la siguiente inecuación en **R** y luego:
$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 6} > 0$$
   a.- Expresar por extensión los números enteros que la satisfacen
   b.- Expresar por extensión los números naturales que la satisfacen

6) Resolver la siguiente ecuación y verificar si la solución es válida: $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x - 1} = 5$

7) Resolver la siguiente ecuación y verificar si la solución es válida: $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} = 24$

8) Resolver la siguiente ecuación y verificar si la solución es válida: $\sqrt{2x - 2} + \sqrt{x} = 7$

9) Resolver la siguiente ecuación y verificar si la solución es válida: $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1$

10) Resolver las siguientes ecuaciones determinando para cada caso el conjunto solución y el intervalo de validez para la variable:

a.- $\sqrt{5x-14} - 2\sqrt{x-1} = 0$

b.- $x^{1/2} + x = 12$

c.- $\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-4x}} = 7$

d.- $(x^2 + 6x)^{1/3} - x = 2$

e.- $\sqrt{2x-2} + 1 = \sqrt{4x-3}$

f.- $\sqrt{x + \sqrt{x^2+9}} = \sqrt{x+5}$

g.- $\sqrt{x+1} + \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 3$

11) Resolver las siguientes ecuaciones determinando el rango de validez de las variables (original y transformada) y el conjunto solución para la variable original:

a.- $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$

b.- $x^{-4} - 10x^{-2} + 9 = 0$

c.- $2\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 - 9\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + 10 = 0$

d.- El cuadrado del valor absoluto de (x – 1) menos su triplo es igual a –2.

e.- $4^x - 3.2^{x+1} + 8 = 0$

12) La quinta parte de un número menos la mitad de otro más un tercio es cero y el primer número menos un medio es un tercio del segundo. Analizar si esos números son 5 y –18 verificando las relaciones dadas. Si la información es incorrecta encuentre los números.

13) En un hotel hay habitaciones simples y dobles. Tiene un total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones de cada tipo tiene el hotel?

14) Un cine vende boletos a $ 8 cada uno pero, a las personas de la tercera edad se les hace un descuento de $ 2. En una tarde, el cine vendió 525 boletos y recaudó $ 3580. ¿Cuántos boletos vendió de cada tipo?

15) La suma de dos números es 81 y la diferencia del doble de primero y el triple del segundo es 62. ¿Cuáles son los números?

16) Dos amigos fueron de visita a una granja en la que había pavos y corderos. Al salir uno de ellos le pregunto al otro: “¿Cuántos pavos y corderos había? Averígualo, vi 72 ojos y 122 patas”.

17) Se necesitaron 30 km de cerca para un campo rectangular. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre la longitud y el ancho es de 5 km?

18) El perímetro de un triángulo isósceles es de 18 cm. Cada uno de los lados iguales es 3 unidades mayor que la base. ¿Cuáles son las medidas de los lados en metros?

19) En una confitería han preparado 60 litros de refresco de ananá con el 10% de jugo puro de fruta. ¿Cuánto jugo puro de ananá deben agregarle para que el refresco contenga el 20% de dicho jugo?

20) Una máquina tiene una masa de 17 kg. Si está compuesta por dos partes y una de ellas pesa 3 kg más que la otra. ¿Cuáles son las masas respectivas?

21) Un triángulo tiene perímetro de 37 cm. El lado mayor tiene 3 cm más que el que le sigue en longitud, el cual a su vez tiene 8 cm más que el lado más corto. Hallar las longitudes de cada lado.

22) En un aula disponiendo 9 alumnos por banco quedan 3 alumnos sin asiento y disponiendo 10 por banco quedan 5 lugares vacíos. Encontrar el número de bancos y de alumnos.

23) La suma de dos números enteros es igual a 100. Si dividimos uno por el otro. El cociente nos da 3 y el resto es 8. ¿Puedes encontrar dichos números?

24) La edad de un padre es el doble de la edad de su hijo, pero hace 18 años la quintuplicaba. Hallar las edades actuales del padre e hijo.

25) Calcule el producto de dos números sabiendo que si son lados de un rectángulo, éste tiene la diagonal mayor igual a 10 m, y sabiendo, además, que si su suma es el lado de un cuadrado, éste tiene área igual a 196 m^2

26) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} y = 2/x^2 + 5/x - 3 \\ y = -2/x + 1 \end{cases}$

27) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} y = 2(1-x)^2 + (1-x) - 6 \\ y = -2(1-x) - 1 \end{cases}$

28) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} y = 3(\log_2 x)^2 - 10\log_2 x + 3 \\ y = -\log_2 x - 3 \end{cases}$

29) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} y = 3(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) - 1 \\ y = -(x^2 - 1) + 1 \end{cases}$

30) La ecuación que describe la altura de un águila para cada instante de tiempo es:

$$y = 525 + 10t$$

donde el tiempo se empezó a contar cuando un cazador dispara una bala cuya altura en función del tiempo es (despreciando la altura del hombro del cazador)

$$y = 200t - 5t^2$$

¿qué significa 525? ¿Acierta el tiro el cazador? Si es así, precise altura y tiempo del impacto. Si hubiera más de un punto posible de impacto ¿cuál elegiría y por qué como respuesta?

31) Determinar la solución del sistema de ecuaciones representado por dos parábolas. La primera tiene el vértice en (2, 3) y pasa por el punto (3, 5). La segunda tiene el vértice en (0, 5) y pasa por el punto(3, 0). Usted debería ser capaz de expresar cada parábola en forma analítica (polinómica, canónica, factorizada); Elegir escalas adecuadas y representarlas en un solo gráfico y encontrar el conjunto solución del sistema gráfica y analíticamente. Eso es lo que se pide en este problema.

32) Sean las dos parábolas:

$$y = x^2 - 2x + 2 \qquad\qquad y = 1/3x^2 + x - 2$$

Determinar si la segunda corta a la primera en las dos ramas, en ninguna o solo en una rama. Si fuera cierta la última alternativa ¿se anima a decir en qué rama en base a un razonamiento puramente algebraico?

33) Dos parábolas son simétricas respecto a la recta y = 2. El vértice de una de ellas es (4, 2) e interseca al eje x en (2, 0) y en (6, 0). Hallar la ecuación polinómica de ambas parábolas y determinar si se intersecan entre sí. Si no fuera así explicar porque no se cortan y que significa eso para el sistema de ecuaciones.

34) Sean dos parábolas

$$y = x^2 \qquad\qquad y = x^2 + 3x - 1$$

Encontrar los puntos comunes; trasladar la primera 5 unidades a la izquierda y 2 abajo y encontrar los nuevos puntos de intersección; ¿cuál es la ecuación de la parábola simétrica de la primera (sin trasladar) respecto a la recta y = -3? ¿Tiene puntos de intersección con la segunda? Si así fuera, determinar, y de lo contrario precisar si se interseca con una traslación paralela al eje x, con una paralela al eje y o si para lograr intersección debe hacer las dos.

Unidad 8: "Funciones"

De todas las relaciones que se pueden formar entre los elementos de dos conjuntos determinados, es interesante rescatar aquellas que aseguran que todo elemento del conjunto de partida se relaciona con algún elemento del conjunto de llegada y que además este último es único; pues nos garantizan que siempre podremos establecer el vínculo deseado y que no hay ambigüedades en este hecho. A este tipo de relaciones se las conoce con el nombre de **función**.

Una función es una relación que posee dos propiedades especiales:

I) ***Todo elemento del conjunto de partida está relacionado con algún elemento del conjunto de llegada, o sea que el conjunto de partida coincide con el dominio de la relación[4].***

II) ***Un elemento del conjunto de partida está relacionado con un único elemento del conjunto de llegada.***

En el caso de trabajar con relaciones que son funciones, se utiliza un vocabulario y una notación específica.
Así:

- Si R es una relación en A X B, se indica:
$$R: A \rightarrow B$$
- Si el par (x; y) $\in$ R se dice que **y es imagen de x por R** y se escribe:
$$R(x) = y$$
- A los elementos del conjunto de partida se los identifica con el nombre de **variable independiente** y a los elementos del conjunto de llegada con el de **variable dependiente**.
- Generalmente se utilizan las letras f, g, h, etc, para nombre a las funciones.

Con este nuevo vocabulario, se puede escribir en símbolos la definición de función de la siguiente forma:

Sea $f : A \rightarrow B$ una relación, f es función si y solo si:
I) $\forall\, x \in A\ \exists\, y \in B$ tal que $f(x) = y$
II) Si $y_1 \in B$ e $y_2 \in B$ cumplen que $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$ para algún $x \in A$, entonces $y_1 = y_2$.

Una función puede presentarse de muchas formas:

- ✓ *mediante su gráfica*
- ✓ *mediante su fórmula*
- ✓ *mediante una serie de puntos*
- ✓ *con una descripción minuciosa del fenómeno al cual responde.*

Cada función relaciona punto a punto, valor a valor, dos variables. Esta asociación que permite conocer el comportamiento puntual de una variable a partir del comportamiento puntual de otra, es lo obvio, lo inmediato en el estudio de la función.

Un estudio profundo propiciará obtener consecuencias más globales a partir de las cuales se podrán hacer previsiones, obtener leyes, tomar decisiones, etc.

---
[4] Es por esta propiedad que dentro del marco teórico de funciones, el conjunto de partida ya no se menciona y sólo interesa el dominio.

Por esto, más que la obtención de valores (puntos) concretos de una gráfica, nos interesará conocer su crecimiento o decrecimiento, la rapidez con que se produce, donde tiene máximos o mínimos y cualquier otro aspecto que permitan un conocimiento global de la función.

En este curso trabajaremos con funciones que relacionan variable cuyos valores son números reales o pertenecen a un subconjunto de los mismos, llamadas funciones numéricas**. Generalmente la relación entre las variables estará dada por una expresión algebraica.**

En lenguaje matemático expresaremos la función de la siguiente manera:

$$\mathbf{f: A} \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \;/\; \mathbf{y = f(x)}$$

Donde **x** indica la variable independiente e **y** la variable dependiente o *imagen de **x** por f.*

Así, la definición dada de función, en lenguaje matemático, es:

$f : A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es función si y solo si: $\forall\, x \in A$ existe un único valor $y \in \mathbf{R}$ tal que $y = f(x)$

Ejemplos:

1- La función f: $R \rightarrow R$ / ***f(x) = 2x + 3***, indica que para encontrar la imagen de un valor del dominio hay que multiplicarlo por dos y sumarle tres. Así:

   f(-1) = 2.(-1) + 3 = 1   f(0) = 2.0 + 3 = 3   f($\sqrt{3}$) = 2$\sqrt{3}$ + 3
   f(c) = 2c + 3   f(x + h) = 2(x + h) + 3

2- Dada la función g: [-2; +∞) → R / g(x) = $\sqrt{x+2}$, resulta que:

   g(-1/2) = $\sqrt{-\frac{1}{2}+2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ g(-4) no existe.

Veremos ahora algunos de los aspectos fundamentales de una función…

Dominio de definición

Generalmente, cuando se expresan las funciones no se especifica cuál es el dominio que debe considerarse, pues se da por entendido que éste será el que se conoce como dominio natural o de definición.

Se llama **dominio de definición o dominio natural** de una función al conjunto de todos los valores de la variable independiente para los cuáles la función está definida.

El dominio de definición de una función, o simplemente dominio, puede estar determinado por diversas causas:

- El contexto del problema (si la variable independiente es la edad de una persona, es claro que no puede ser menor que cero ni mayor que 120 años)
- La propia voluntad de quien la propone (podemos referirnos a edades entre 0 y 20 años, por que sí)

- Las limitaciones algebraicas de la fórmula que la define.

Con respecto a las dos primeras causas no tenemos nada que agregar, pues dependen del contexto particular en que se aplique este modelo matemático.

Vamos a estudiar la tercera causa, es decir las limitaciones de la fórmula que define la función.

Como ya dijimos, nos centraremos en funciones definidas en un subconjunto de los números reales, por lo tanto las limitaciones de la fórmula estarán relacionadas con las limitaciones que existen para operar números reales.

En general, podemos hablar de **cuatro inconvenientes** para operar con **números reales**:
1) ***No se puede dividir por cero***
2) ***No se puede calcular raíces de índice par de números negativos***
3) ***No se puede calcular logaritmo de números negativos o cero***
4) ***Las bases de las funciones exponenciales deben ser mayores que cero.***

Por lo tanto, siempre que la fórmula de una función no presente alguna de estas operaciones, su dominio serán todos los números reales (D_f = **R**).
En caso de que la fórmula posea alguna de estas operaciones, se deberá poner las restricciones correspondientes y calcular cuál es el dominio.

Ejemplos:

1- ¿Cuál es el dominio de f(x) = $3x^3 + \frac{3}{5}x^4 + \sqrt{3}x^2 - 5$?

El Df = **R**, pues su fórmula presenta operaciones que se pueden realizar para cualquier valor real que tome la variable x.

2- ¿Cuál es el dominio de f(t) = 2^t?
El Df = **R** pues si bien es exponencial, la base no es variable.

3- ¿Cuál es el dominio de f(s) = $\sqrt{2s-3}$
En este caso debe se

$$2s - 3 \geq 0$$

Por lo tanto

$$s \geq \frac{3}{2}$$

Luego Df = $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

4- ¿Cuál es el dominio de definición de g(x) = $\frac{x^3-8}{\sqrt[3]{x-2}}$?

En este caso el único problema es que el denominador sea cero, por lo tanto calculamos cuándo vale cero y ese/os valor/es los sacamos del dominio. Es decir:

$$x - 2 = 0$$

Entonces

$$x = 2$$

Luego Dg = **R** – {2}

5- ¿Cuál es el dominio de definición de $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{3x+6}\right)$?

Las condiciones que debe cumplir la variable x para poder calcular la función son:

$$\frac{x-1}{3x+6} > 0 \text{ y } 3x + 6 \neq 0$$

Que se traducen en:

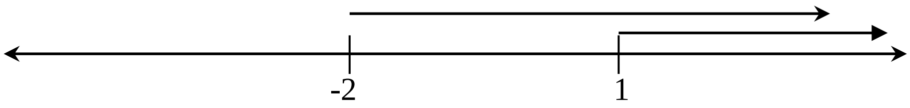
$$[(x - 1 > 0 \text{ y } 3x + 6 > 0) \text{ o } (x - 1 < 0 \text{ y } 3x + 6 < 0)] \text{ y } 3x + 6 \neq 0$$

Es decir

$$[(x > 1 \text{ y } x > -2) \text{ o } (x < 1 \text{ y } x < -2)] \text{ y } x \neq -2$$

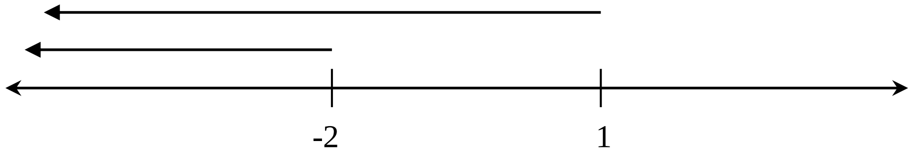
Si graficamos en la recta numérica:

$x > 1$ y $x > -2$



es decir $x > 1$

$x < 1$ y $x < -2$



es decir $x < -2$

Por lo tanto tenemos que

$$(x > 1 \text{ o } x < -2) \text{ y } x \neq -2$$

Luego Df = $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

6- ¿Cuál es el dominio de $f(x) = (3 - x)^{x-1}$?

Las condiciones que debe cumplir la variable x para poder calcular la función son:

$$3 - x > 0$$

Es decir que

$$x < 3$$

Luego Df = $(-\infty; 3)$

Ceros o raíces

Se define como **cero o raíz** de una función f al/a los valor/es de la variable independiente para el/los que la función vale cero. Es decir:

$x \in$ **R** es **raíz o cero** de f si y solo si $f(x) = 0$

Al conjunto de ceros a raíces de una función se le puede indicar con el símbolo C_0f, o sea:

$$\mathbf{C_0f = \{x \in Df \,/\, f(x) = 0\}}$$

Ejemplos:

Hallar, si tiene, los ceros de:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ c) $f(x) = \log(3x-9)$

d) $f(x) = 5^{x-1}$

Solución:

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2.(x-3) + (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x^2+1).(x-3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ o $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
Luego f tiene una única raíz en x = 3.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 3$ o $x = 2$.
Luego $C_0f = \{2; 3\}$

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log(3x-9) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 10^0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$
Luego f tiene raíz en $x = \frac{10}{3}$

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5^{x-1} = 0$, pero esto no es posible para ningún valor de x, luego
$C_0f = \varnothing$

Conjuntos de positividad y negatividad

Se define como el **conjunto de positividad** de una función f (C_+f) a los valores x de su dominio que verifican la desigualdad

$$f(x) > 0$$

Es decir:

$$\mathbf{C_+f = \{x \in Df \,/\, f(x) > 0\}}$$

De la misma forma, el **conjunto de negatividad** (C_-f) de f son los valores x de su dominio que verifican:

$$f(x) < 0$$

Es decir:

$$\mathbf{C_-f = \{x \in Df \,/\, f(x) < 0\}}$$

Ejemplos:

Hallar los C_+f y C_-f para las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ c) $f(x) = \log(3x-9)$
d) $f(x) = 5^{x-1}$

Solución:

a) Factorizando, resulta

$$f(x) = (x^2 + 1).(x - 3)$$

Luego

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2+1).(x-3) > 0 \Leftrightarrow [(x^2 + 1 > 0 \text{ y } x - 3 > 0) \text{ o } (x^2 + 1 < 0 \text{ y } x - 3 < 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3,$$

Por lo tanto $C_+f = (3; +\infty)$

Como el Df = R, resulta que $C_-f = (-\infty; 3)$

b) Como f es una raíz cuadrada, su resultado siempre es positivo o cero, luego f es positiva para todos los valores de su dominio que no la anulen.

El dominio de f es:

$$Df = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$$

y f se anula en x = 2 o x = 3, resulta que

$$C_+f = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) \text{ y } C_-f = \varnothing$$

c) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log(3x - 9) > 0 \Leftrightarrow 3x - 9 > 10^0 \Leftrightarrow 3x - 9 > 1 \Leftrightarrow x > \frac{10}{3}$, luego

$$C_+f = (\frac{10}{3}; +\infty)$$

Como Df = (3; +∞), resulta que:

$$C_-f = (3; \frac{10}{3})$$

d) f resulta siempre positiva, pues 5 elevado a cualquier número real es positivo; y además su Df = **R**, luego

$$C_+f = \mathbf{R}$$

y

$$C_-f = \varnothing$$

Inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, función inversa

Sabemos entonces que una función relaciona dos variables (una independiente y otra dependiente) de forma tal que a cada valor de la variable independiente le hace corresponder un y solo un valor de la variable dependiente.

Si una vez que hemos realizado la transformación de la variable independiente a través de la función, queremos deshacer el procedimiento se plantean preguntas como:

¿será posible? ¿cuándo podremos hacerlo?
¿tendremos una única forma de deshacerlo?

Revisemos primero algunos ejemplos

Ejemplos:

1- Sea f(x) = 3x + 1
Dado un valor para x, la transformación que realiza esta función es:
① Triplica el valor
② Le suma 1
Si deseamos volver atrás el camino, tendremos que :
❶ Restar 1
❷ Dividir por 3
Luego si el resultado de f(x) = y, resulta que:

$$x = \frac{y-1}{3}$$

Con lo cual pudimos revertir la transformación hecha por f de forma única.

2- Consideremos ahora $f(x) = x^2$, en este caso lo que hace f con el valor de x es elevarlo al cuadrado.
Por lo tanto si queremos revertir el camino tenemos que calcular la raíz cuadrada del valor de y. Luego

$$x = \sqrt{y}$$

Pero el valor de x que obtengamos al aplicar la transformación obtenida siempre será positivo o cero, mientras que los valores iniciales que podía tomar x eran tanto positivos, cero, como negativos. Esto es que si por ejemplo partimos de:

$$x = 2$$

Lo transformamos por f y luego hacemos el camino inverso tenemos:

$$f(2) = 4 \Leftrightarrow y = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2$$

Pero si también hacemos este doble camino para

$$x = -2$$

Tenemos

$$f(-2) = 4 \Leftrightarrow y = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2$$

Luego, el camino inverso nos lleva al mismo lugar para dos valores distintos de partida. Por lo tanto no cumple con una de las condiciones de ser función.
Además si y = -4 no podemos encontrar ningún valor de x del cual proviene.
En síntesis, si bien podemos revertir la transformación hecha por la función, esta no nos devuelve exactamente el valor inicial del que partimos, y a veces ni siquiera devuelve algo.

La respuesta a la primer pregunta es, entonces, que:

No siempre es posible

Para contestar la segunda pregunta, daremos una serie de definiciones.

Definiciones:
Sea $A \subseteq \mathbf{R}$, $B \subseteq \mathbf{R}$ y f: $A \to B$ una función

*Se dice que f es **inyectiva** si para cualquier par de valores $x_1 \in A$ y $x_2 \in A$, resulta que:*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

*Se dice que f es **sobreyectiva o suryectiva** si para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

*Se dice que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva*

Revisemos los ejemplos anteriores para ver si las funciones presentadas cumplen con algunas de estas definiciones:

Ejemplos:

1- Para el caso de f(x) = 3x + 1
Lo primero es determinar los conjunto A y B a los que se refiere la definición, cuando éstos no están explícitamente dados se asume que A = Df y B = **R**.
En este caso A = **R.**
Veamos si es inyectiva. Para ello tomemos dos valores x_1 y x_2 en los reales y calculemos f para cada uno:

$$f(x_1) = 3x_1 + 1 \quad y \quad f(x_2) = 3x_2 + 1$$

Ahora igualamos

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Es decir

$$3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$$

Restando 1 a ambos miembros

$$3x_1 = 3x_2$$

Dividiendo por 3

$$x_1 = x_2$$

Luego f es inyectiva.
Veamos si es sobreyectiva, para ello dado $y \in \mathbf{R}$, debemos encontrar $x \in \mathbf{R}$ tal que

$$f(x) = y.$$

Pero esto es lo que hemos hecho en el ejemplo anterior pues si tomamos $x = \dfrac{y-1}{3}$

Resulta

$$f\left(\frac{y-1}{3}\right) = 3.\frac{y-1}{3} + 1 = y - 1 + 1 = y$$

Por lo tanto f también es sobreyectiva y resulta biyectiva.

2- Para $f(x) = x^2$, tenemos que A = **R** y B = **R**
Ahora bien, tomemos x_1 y x_2 números reales y calculemos f para ambos.

$$f(x_1) = x_1^2 \quad y \quad f(x_2) = x_2^2$$

Igualamos

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Es decir

$$x_1^2 = x_2^2$$

Ahora aplicamos raíz cuadrada

$$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$$

Tenemos

$$|x_1| = |x_2|$$

O sea que no necesariamente son iguales, luego f no es inyectiva.
Tampoco resulta sobreyectiva la función, pues en el ejemplo vimos que si y = -4 no podemos encontrar ningún valor de x tal que $f(x) = x^2 = -4$.

Si una función es biyectiva tiene la propiedad que: **Su relación inversa es también función**

A esta relación inversa que resulta ser función se la llama función inversa, y si f es la función inicial se la escribe como f^{-1}.

Cuando verificamos si la función es sobreyectiva, estamos buscando cuál es la fórmula que describe su relación inversa. Si esta fórmula responde a una función entonces será la fórmula correspondiente a la función inversa.

Ejemplos:
Para $f(x) = 3x + 1$ resulta $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$
Ahora bien, cuando una función no resulta biyectiva podemos intentar modificar los conjuntos A y B para que lo sea.

En el caso de $f(x) = x^2$, si consideramos $A = [0; +\infty)$ y $B = [0; +\infty)$ tenemos que su relación inversa es también función.

Siempre se intentará que estos nuevos conjuntos sean los mayores posibles.

Una definición más:

Definición:
$A \subseteq$ **R**, $B \subseteq$ **R** y $f: A \to B$ una función, se llama **imagen de f** (Imf) al conjunto de todos los valores de B que son resultado de aplicar f a los valores de A. Es decir:

$$\mathbf{Imf = \{y \in B \ / \ existe\ x \in A\ tal\ que\ f(x) = y\}}$$

Con esta definición, podemos afirmar que una función será **sobreyectiva si el conjunto B en cuestión coincide con su imagen**.

Operaciones con funciones

Sean $A \subseteq \mathbf{R}$, $B \subseteq \mathbf{R}$ y dos funciones f: $A \to B$ y g: $A \to B$, podemos a partir de ellas definir nuevas funciones a través de operaciones. Así obtenemos las funciones:

s: $A \to B$,	$s(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
r: $A \to B$,	$r(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$
p: $A \to B$,	$p(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)$
c: $A - \{x \in A \,/\, g(x) = 0\} \to B$,	$c(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Así, muchas de las funciones que conocemos las podemos obtener operando con funciones más sencillas; por ejemplo:

Ejemplos:

1- Sea $f(x) = -2x + 3$, la podemos obtener operando las siguientes funciones:

$$f_1(x) = -2$$
$$f_2(x) = x$$
$$f_3(x) = 3$$

De la siguiente forma:

$$f(x) = f_1(x).f_2(x) + f_3(x)$$

2- Sea $f(x) = 5x^2 - 3x^3$, la podemos obtener a partir de:

$$f_1(x) = 5$$
$$f_2(x) = x$$
$$f_3(x) = 3$$

Operando de la siguiente forma:

$$f(x) = f_1(x).f_2(x).f_2(x) - f_3(x).f_2(x).f_2(x).f_2(x)$$

Ahora bien, no todas las funciones las podemos construir a partir de otras más sencillas nada más que con estas operaciones, existe otra operación entre funciones llamada **composición de funciones**.

Definición: *Dados $A \subseteq R$, $B \subseteq R$ y $C \subseteq R$, y las funciones:*

$$g: A \to B \quad y \quad f: B \to C$$

Se define la **composición de f con g** y se escribe **fog** de la siguiente forma:

$$\mathbf{(fog)(x) = f(g(x))}$$

Ejemplos:

1- Dadas $f(x) = 6 - 2x$ y $g(x) = x^2 + 2$, calcular fog y gof

Solución:

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 6 - 2.(x^2 + 2) = -2x^2 + 2.$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(6 - 2x) = (6 - 2x)^2 + 2 = 38 - 24x ++ 4x^2.$

2- Dada la función $h(x) = \sqrt{\sin(x)}$, obtenerla como composición de dos funciones.

Solución:

Consideremos $h_1(x) = \sin(x)$ y $h_2(x) = \sqrt{x}$, luego

$$h_2oh_1(x) = h_2(h_1(x)) = h_2(\sin(x)) = \sqrt{\sin(x)}$$

3- Dada la función $g(t) = \cos^3(t - 1)$, obtenerla como composición de tres funciones

Solución:

Tomemos $g_1(t) = t - 1$, $g_2(t) = \cos(t)$ y $g_3(t) = t^3$, resulta que:

$g(t) = g_3 o g_2 o g_1(t) = g_3(g_2(g_1(t))) = g_3(g_2(t – 1)) = g_3(\cos(t – 1)) = (\cos(t – 1))^3$.

Comentario: revisando el ejemplo 1, vemos que esta operación entre funciones no es conmutativa.

Sea y = f(x) una función y consideramos la función

$$t(x) = x + a$$

Al realizar la composición

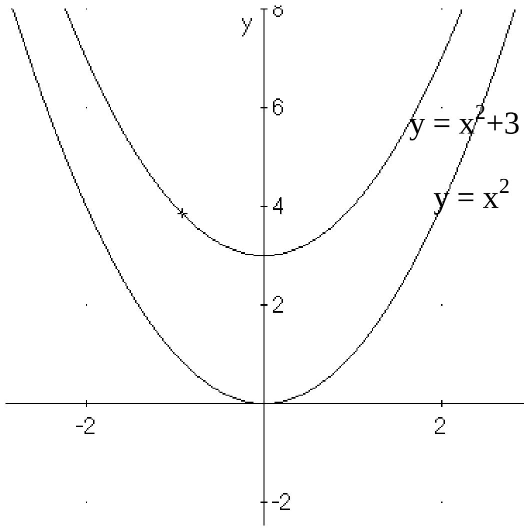
$$tof(x)$$

Se obtiene

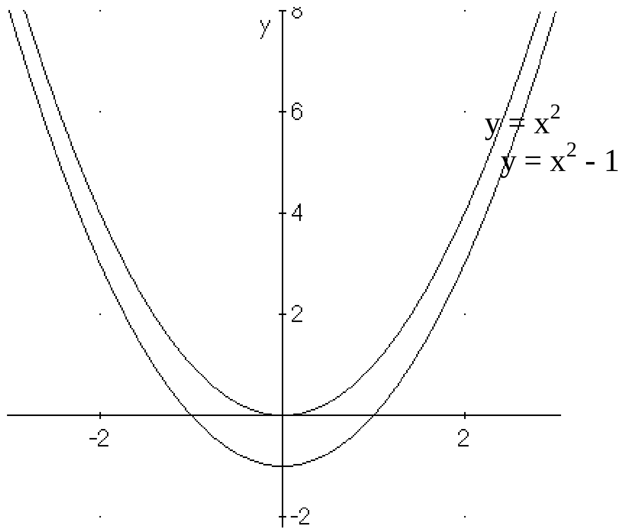
$$f(x) + a$$

O sea que los valores de y = f(x) se desplazan “a” unidades. Resulta que el gráfico de y = f(x) + a está desplazado “a” unidades respecto del eje y, del gráfico de y = f(x), pero su forma no se altera.

Ejemplo:
Consideremos $f(x) = x^2$ y $t(x) = x + 3$, luego $tof(x) = x^2 + 3$ y resulta que los gráficos son:



Si ahora $t(x) = x – 1$, entonces $tof(x) = x^2 – 1$ y el gráfico resulta



Si ahora realizamos la composición:

$$y = fot(x)$$

obtenemos

$$y = f(x + a)$$

Luego, si $f(x') = y$, para que $f(x + a) = y$ debe ser

$$x' = x + a$$

O sea que

$$x = x' - a$$

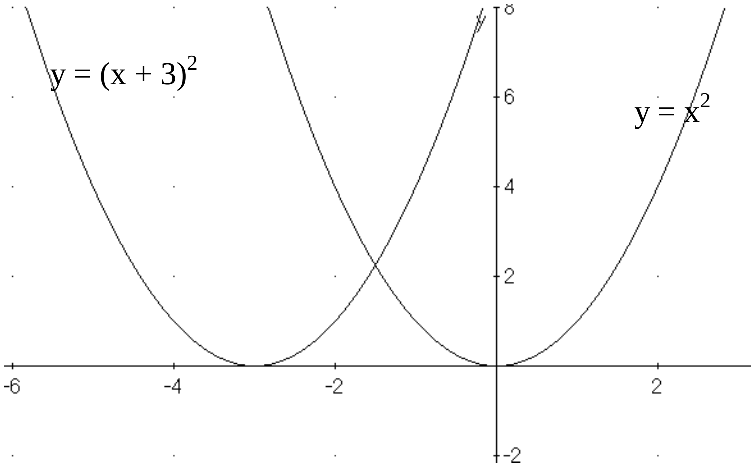
Luego la gráfica de $y = f(x + a)$ se desplaza respecto del eje x "-a" unidades, pero tampoco varía su forma.

Ejemplo:

Si componemos $f(x) = x^2$ con $t(x) = x + 3$, obtenemos

$$y = (x + 3)^2$$

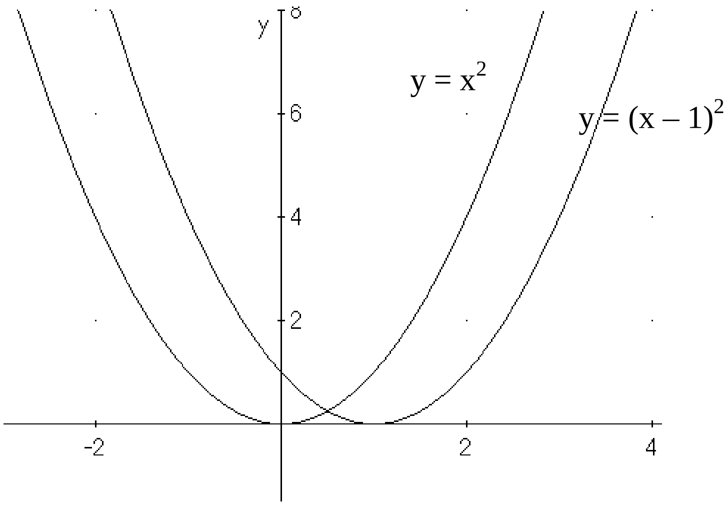
y sus gráficas son



Si ahora lo hacemos con $t(x) = x – 1$, resulta

$$y = (x – 1)^2$$

Y las gráficas son



Las funciones de la forma

$$T(x) = x + a$$

Se conocen con el nombre de **traslaciones** por el efecto que producen en las gráficas de otras funciones al componerlas.

Si consideramos ahora las funciones de la forma

$$h(x) = k.x$$

resulta que al realizar la composición de h con una función f se obtiene:

$$y = k.f(x)$$

es decir que las imágenes de f se multiplican punto a punto por el valor k. En la gráfica se observa un "estiramiento" de la curva respecto del eje y.

En el caso de que k = -1 se obtiene una gráfica simétrica a la de y = f(x) respecto del eje x.

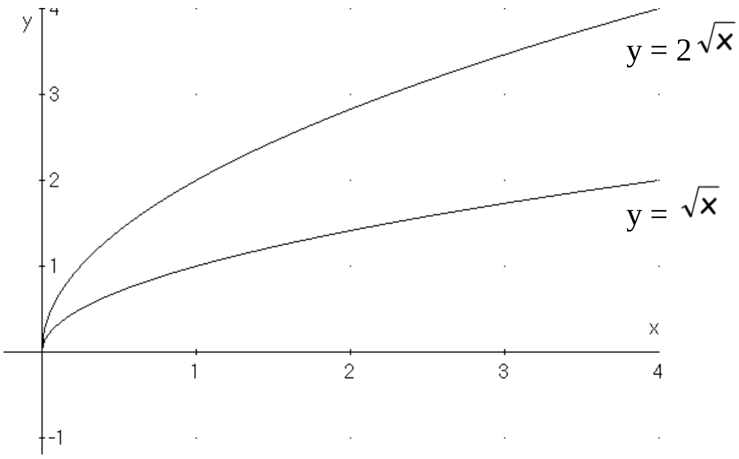
Consideremos ahora la función

$$y = \sqrt{x}$$

y realicemos la composición hof(x) donde h(x) = 2x, obtenemos la función:

$$y = 2\sqrt{x}$$

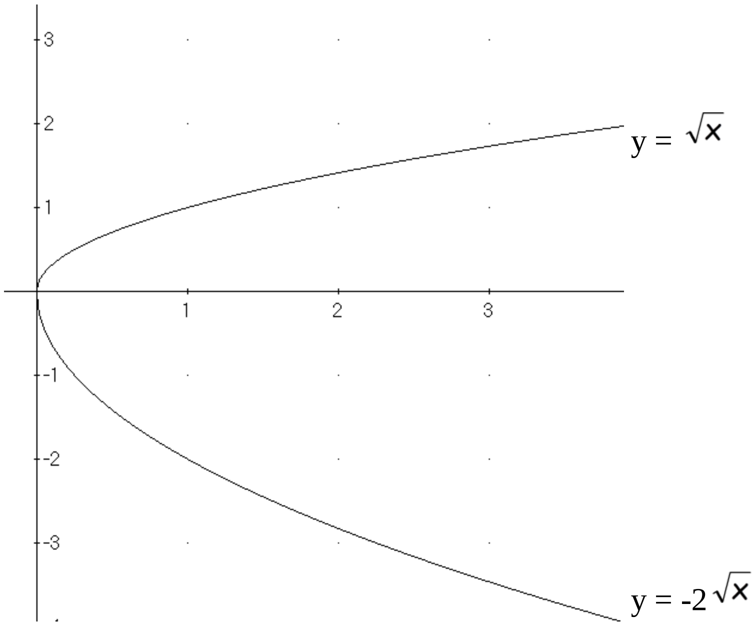
Las gráficas correspondientes son:



si ahora tomamos h(x) = -2x, se obtiene

$y = -2\sqrt{x}$

y las gráficas resultan



Las funciones de la forma h(x) = k.x se conocen con el nombre de **homotecias**.

Serie de problemas Nº 8

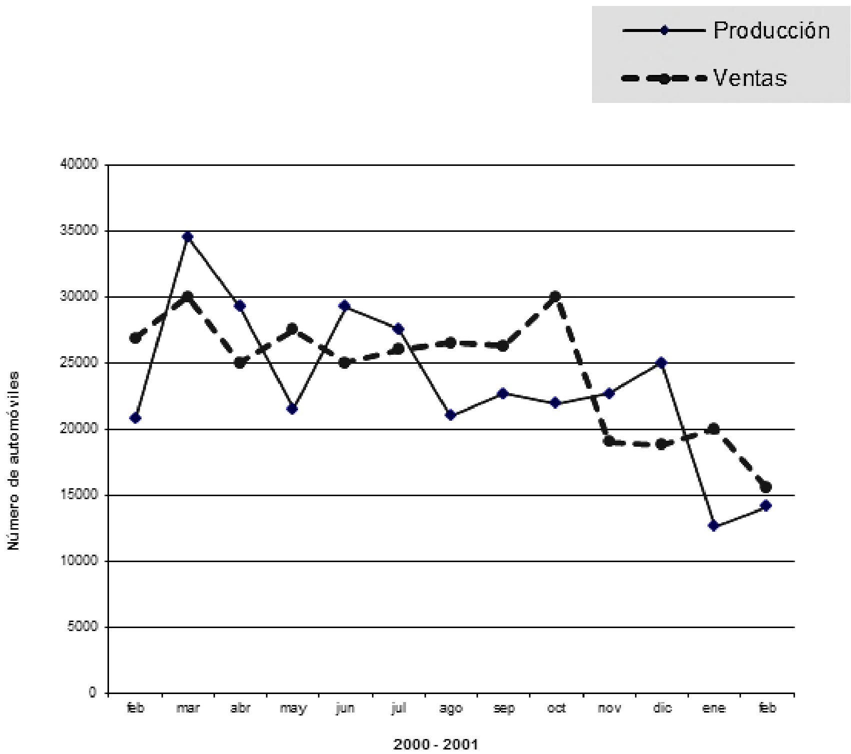
1) El precio del dólar, en pesos, los días 15 de cada mes de un año fueron:

DIA 15											
E	**F**	**M**	**A**	**M**	**Jn**	**Jl**	**A**	**S**	**O**	**N**	**D**
1,36	1,43	1,47	1,41	1,32	1,28	1,19	1,14	1,10	1,12	1,17	1,17

Representa en papel cuadriculado sobre ejes cartesianos los doce puntos de la tabla anterior. ¿Se pueden unir con una línea? ¿por qué?

2) Saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo. Al principio la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 5 minutos estaba a 60º. Luego fue enfriándose con lentitud. A los 20 minutos de haberla sacado estaba a 35º, y 20 minutos más tarde seguía teniendo algo más de 20º, temperatura de la cual no bajó, pues era la temperatura que había en la habitación.
   a) Realiza una gráfica que refleje lo mejor posible la evolución de la temperatura del agua que se describe.
   b) Compara tu gráfica con la de tus compañeros. ¿son iguales? ¿por qué?

3) Observen el siguiente gráfico extraído del Diario La Nación del 6 de marzo de 2001, que representa la venta y la producción de automóviles en nuestro país durante un año:



   a. ¿En qué mes fue la máxima producción de autos?
   b. ¿En qué período cayeron más las ventas?
   c. ¿En qué meses hubo mayor diferencia entre la producción y la venta de automóviles?

4) La gráfica siguiente describe la evolución de la temperatura de un paciente con el paso del tiempo:

a) ¿Qué variables se relacionan? ¿Qué unidades se toma para cada variable?
b) ¿Cuántos días ha estado enfermo el paciente? (se considera normal una temperatura de 36,5º)
c) ¿Qué ocurre entre los días 2 y 5? ¿Qué ocurre en el sexto día?
d) ¿Cuándo es la máxima temperatura? ¿Cuándo la mínima?
e) ¿En qué períodos su temperatura ha sido estable?

5) Una conferencia telefónica cuesta tanto más cuanto más tiempo dure. Supongamos que en las llamadas urbanas un teléfono público necesita de $ 2 para comenzar y su efecto dura 1,5 minutos, a partir de ese momento necesita de $1 por cada 30 segundos.
   a. Realizar una gráfica de la situación
   b. ¿Qué variables se consideran? ¿Qué unidades tienen cada variable? ¿cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
   c. ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea?

6) Un médico dispone de 1 h diaria de consultas. El tiempo que podría dedicar a cada paciente, por término medio, depende del número de ellos que acudan:

i.	Paciente	60 minutos
ii.	Pacientes	30 minutos
iii.	Pacientes	20 minutos

   Así hasta un máximo de 30 pacientes.
   a. Realizar una gráfica de la situación
   b. ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuál es independiente y cuál dependiente?
   c. ¿Tiene sentido unir los puntos del gráfico con una línea?
   d. ¿Es una relación funcional?

7) En un estacionamiento público figura la siguiente tarifa de precios:

Una hora o fracción	$25
Cada hora más o fracción	$15

   a. Realizar una gráfica de la situación
   b. ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuál es independiente y cuál dependiente?
   c. ¿Tiene sentido unir los puntos del gráfico con una línea?
   d. ¿Es una relación funcional?

8) Una empresa de alquiler de automóviles alquila cierto modelo de vehículo por $750 diarios. Otra empresa alquila el mismo modelo cobrando $7,5 por km recorrido.
   a. Representar las respectivas relaciones en un mismo SECO.
   b. ¿Son relaciones funcionales? ¿Cuáles son las variables independiente y dependiente? ¿son continuas?
   c. ¿En qué empresa conviene alquilar este tipo de automóviles? ¿Por qué?

9) Se deja caer rodando una bola por un carril al que se le da distintas inclinaciones. Se mide la distancia s que hay desde el final del carril hasta que se detiene la bola y se obtiene la tabla:

h (cm)	1	1,5	2	2,5	3	3,5
s (cm)	18	27	36	45	54	63

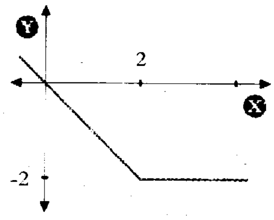
Realizar la gráfica correspondiente y encontrar una ecuación que relaciones a s con h.

10) En experiencias de laboratorio se ha obtenido la siguiente tabla que relaciona el estiramiento (en cm) de un resorte según la masa (en gramos) que se cuelga de él:

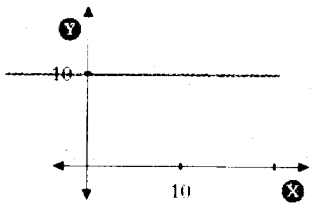
Masa (m)	0	30	60	90	120	150	180
Estiramiento (□x)	0	9	18	27	36	45	54

a. Representar gráficamente los valores obtenidos en una hoja milimetrada.
b. ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea? ¿Qué tipo de línea queda?
c. ¿Cuál es el dominio de esta relación?
d. Realiza en cada par ordenado la cuenta **□x/m**. ¿Qué se observa en los resultados obtenidos? Este valor constante que se obtiene se conoce como constante elástica. Cada resorte tiene una constante específica.
e. Obtener una fórmula que sea útil para calcular el estiramiento que se obtiene al colgar cualquier peso en el resorte.

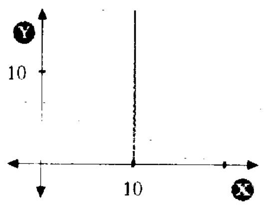
11) ¿Cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones con dominio en todos los números reales? Justificar las respuestas.



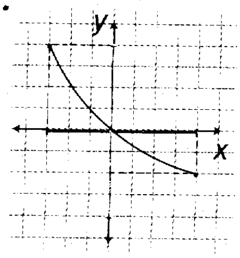
a)

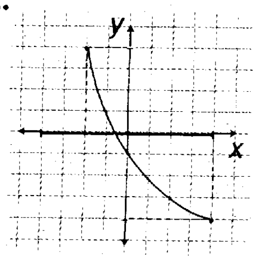


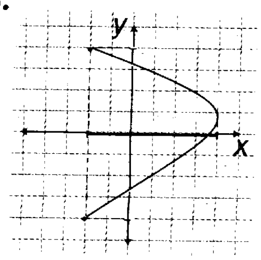
b)

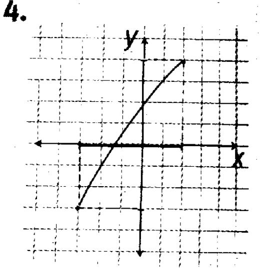


c)

1.


2.


3.


4.


12) Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones:
a. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
b. $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$
c. $g(t) = \sqrt{t-2}$
d. $r(z) = \sqrt{3z^2 - 1}$
e. $h(y) = \sqrt{y^2 + 1}$
f. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
g. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
h. $f(x) = x^{1/4}$

i. f(x) = $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$

j. f(x) = $\dfrac{x+3}{(x^2-2)(x+1)(x^2+4)}$

k. f(x) = $\log(2x+4)$

l. f(x) = $\log\left(\dfrac{x^2-4}{x-5}\right)$

13) Calcular los ceros de las funciones dadas en el ejercicio 1.

14) Dar el conjunto de positividad y de negatividad de cada una de las funciones del ejercicio 1.

15) Decidir cuál de las siguientes funciones es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva de R en R.

a) $f(x) = x$ b) $g(y) = 5y - 3$ c) $h(r) = r^2 + 5$
d) $i(x) = -2x^2 - \sqrt{2}$ e) $j(k) = k^2 - 4k + 4$ f) $k(z) = z^2 + 6z - 3$
g) $m(x) = -3x^2 - 7x + 3$ h) $n(t) = 3t^3 - 5$ i) $o(s) = \dfrac{3}{s-1}$
j) $p(y) = \dfrac{y-4}{y-1}$ k) $q(x) = \sqrt{x-3}$ l) $r(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}x-5}$

16) Para las funciones del ejercicio anterior determinar los conjuntos de partida y llegada para que las funciones que no eran biyectivas, lo sean. Hallar las funciones inversas en cada caso.

17) Expresar como composición de 2 o más funciones:

a) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$ b) $f(x) = (\sin x)^2 + 1$ c) $f(x) = \sqrt{\sin x}$
d) $f(x) = \sin x + 1$ e) $f(x) = \sin(x + 1)$ f) $f(x) = \sqrt[3]{\log^4(\sin(x^3-4))}$

18) Para $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, encontrar si es posisble:

a) $(f + g)(2)$ b) $(f.g)(0)$ c) $(g/f)(3)$
d) $(fog)(0)$ e) $(gof)(\sqrt{8})$ f) $(gof)(0)$

19) Si $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$, encontrar una fórmula para cada una de las siguientes expresiones y establecer su dominio:

a) $(f + g)(x)$ b) $(f/g)(x)$ c) $(fog)(x)$ d) $(gof)(x)$

20) Encontrar los siguientes valores utilizando la **calculadora**:

a) f(3,12) si $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{1+x^3}\right)^5$

b) g(2,03) si $g(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^2}{1-x+x^2}$

c) $\sqrt{f^2(3.46)+4f(3.46)}$ si $f(x) = 1/x$

d) $[g^3(\pi)-g(\pi)]^{1/3}$ si $g(x) = 2\sin(0,5x)$

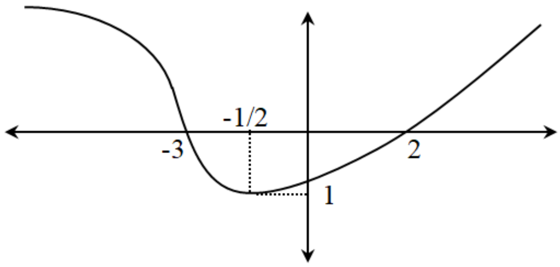
21) Dada f(x) = x^2 graficar en un mismo sistema de coordenadas y = f(x) y las composiciones dadas:

a. $fof_1(x)$ y $f_1of(x)$ para $f_1(x) = x - 2$
b. $fof_2(x)$ y $f_2of(x)$ para $f_2(x) = x + 1$
c. $fof_3(x)$ y $f_3of(x)$ para $f_3(x) = 2x$
d. $fof_4(x)$ y $f_4of(x)$ con $f_4(x) = 0{,}5x$
e. $fof_5(x)$ y $f_5of(x)$ con $f_5(x) = -x$

22) Repetir el ejercicio 1 con f(x) = $\sqrt{x}$

23) Repetir el ejercicio 1 con f(x) = $\frac{1}{x}$

24) Dado el siguiente gráfico correspondiente a una función:



Graficar aproximadamente:

a) $f(x - 1)$ b) $f(x + 2)$ c) $f(x) - 1$ d) $f(x) + 2$
e) $-f(x)$ f) $2f(x)$ g) $-3f(x - 2) + 2$

25) Para las funciones que se dan a continuación:

a) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ b) $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

d) $f(x) = 3^{x-1} - 3$ e) $f(x) = 3\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$ g) $f(x) = \log_2(2x - 1)$

1) Calcular D_f, C_o, C_+, C_-.
2) Realizar aproximadamente sus gráficas.
3) Determinar si son inyectivas y/o sobreyectivas de R en R. En caso de no serlo redefinir su dominio y codominio para que lo sean.
4) Calcular su imagen.
5) Hallar su función inversa y graficarla.

Alfabeto griego

Α, α	Alfa
Β, β	Beta
Γ, γ	Gamma
Δ, δ	Delta
Ε, ε	Epsilon
Ζ, ζ	Zeta
Η, η	Eta
Θ, θ	Thita
Ι, ι	Iota
Κ, κ	Kappa
Λ, λ	Lambda
Μ, μ	Mu
Ν, ν	Nu
Ξ, ξ	Xi
Ο, ο	Omicron
Π, π	Pi
Ρ, ρ	Rho
Σ, σ	Sigma
Τ, τ	Tau
Υ, υ	Upsilon
Φ, φ	Phi
Χ, χ	Chi
Ψ, ψ	Psi
Ω, ω	Omega